

TASTENZAHOPTIMA
GLEICHSTUFIGE STIMMUNGEN

THEMA

Es sollen gleichstufige Stimmungen untersucht werden. Die Oktav wird in n gleich große Teilintervalle zerlegt. Bei einem dazu passenden Tasteninstrument, wäre dann n die Tastenzahl pro Oktav.

GESCHICHTE

Vorschläge für solche Stimmungen haben gemacht:

1555	Vicentino	$n = 31$
1558	Zarlino	$n = 19$
1626	Fernandez	$n = 55$
1675	Mercator	$n = 53$
1701	Sauveur	$n = 43$
1710	Heuffling	$n = 50$
1846	Chevé	$n = 29$
1892	Behrens-Senegalden	$n = 24$
1895	Carillo	$n = 96$
1906	von Jankó	$n = 41$

GRUNDLAGEN

Die Oktav misst 1200 Cents. Jedes der n gleich großen Teilintervalle misst den n -ten Teil von 1200 Cents. Diese Größe nennen wir p . Es gilt also:

$$p = 1200 / n$$

In solchen Stimmungen kommen nur Intervalle vor, welche Vielfache von p sind. Darum gibt es keine ganz reinen Quinten und keine ganz reinen großen Terzen.

$$\begin{aligned} \text{reine Quint [Cents]} &= q = 1200 \cdot \text{lb}(1.50) \approx 701.955 \\ \text{reine großen Terz [Cents]} &= t = 1200 \cdot \text{lb}(1.25) \approx 386.314 \end{aligned}$$

Dabei ist $\text{lb}(x)$ der Logarithmus von x zur Basis 2.

Auf dem TI-Rechner ist $\text{lb}(x) = \log(x) / \log(2)$.

In EXCEL rechnet man $\text{lb}(x) = \text{LOG}(x;2)$.

ZIEL DER UNTERSUCHUNG

Man will herausfinden, wie gut die reine Quint q und die reine große Terz t in solchen Stimmungen angenähert werden können.

TASTENZAHLOPTIMA
ANNÄHERUNGEN

ANNÄHERUNG DER REINEN QUINT

Welches Vielfache $v \cdot p$ von p liegt am nächsten bei q ?

$$v \cdot p \approx q$$

$$v = q/p \text{ (gerundet auf 0 Stellen)}$$

in EXCEL: $v = \text{RUNDEN}(q/p;0)$

Die Differenz zur reinen Quint ist dann also

$$\Delta q = v \cdot p - q$$

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner
für $n = 5, n = 6, n = 10$ und $n = 24$
je $p, v, v \cdot p$ und Δq .

Zur Erinnerung: $p = 1200/n, q = 701.955$

ANNÄHERUNG DER REINEN GROSSEN TERZ

Welches Vielfache $w \cdot p$ von p liegt am nächsten bei t ?

$$w \cdot p \approx t$$

$$w = t/p \text{ (gerundet auf 0 Stellen)}$$

in EXCEL: $w = \text{RUNDEN}(t/p;0)$

Die Differenz zur reinen Quint ist dann also

$$\Delta t = w \cdot p - t$$

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner
für $n = 5, n = 6, n = 10$ und $n = 24$
je $p, w, w \cdot p$ und Δt .

Zur Erinnerung: $p = 1200/n, t = 386.314$

TASTENZAHLOPTIMA
FEHLER IN DER ANNÄHERUNG

FEHLERMESSUNG

Den Fehler F, den eine gleichstufige Stimmung bei der Annäherung von reiner Quint und reiner großer Terz messen wir mit der Größe

$$F = \Delta q^2 + \Delta t^2$$

Eine Tastenzahl n liefert dann ein relatives Optimum, wenn der Fehler F ein relatives Minimum ist.

EXCEL-DOKUMENT «TASTENZAHLOPTIMA»

Sie müssen jetzt am Macintosh mit EXCEL am Problem weiter arbeiten. Öffnen Sie das vorbereitete EXCEL-Dokument «Tastenzahloptima».

Dort sind im vorbereiteten EXCEL-Dokument für 701.955 der Name q und für 386.314 der Name t bereits festgelegt. In Formeln können also q und t benützt werden.

In der Zeile 8 müssen Sie die passenden Formeln entragen:

- für p im Feld B8
- für v im Feld C8
- für Δq im Feld D8
- für w im Feld E8
- für Δt Feld F8
- für F im Feld G8

Füllen Sie nun die Spalten B, C, D, E, F und G mit «Ausfüllen» «Abwärts».

KONTROLLE

Ihre Formeln sind dann korrekt, wenn sie folgende F-Werte liefern:

n =	F =
1	397'287
2	56'057
3	9'800
5	9'103
7	2'152

