

Vorbemerkungen

Diese kurze Abhandlung ist ein Nischenprodukt zum Themenkreis «Perspektive im 14., 15. und 16. Jahrhundert». Dieser Themenkreis war in den Jahren 2014 bis 2021 eines der Forschungsgebiete von Professor Norberto Gramaccini, Kunsthistoriker am Institut für Kunstgeschichte der Universität Bern und an der Renmin University Beijing. Spezielles Augenmerk legte er dabei auf die Malerei und die Malerwerkstätten im Raume Padua, sowie auf die beiden Skizzenbücher Jacopo Bellinis. Damals habe ich für Professor Gramaccini Rekonstruktionen gezeichnet, die enthalten sind in

Norberto Gramaccini
JACOPO BELLINI'S BOOK OF DRAWINGS
De Gruyter, Berlin/Boston, 2021

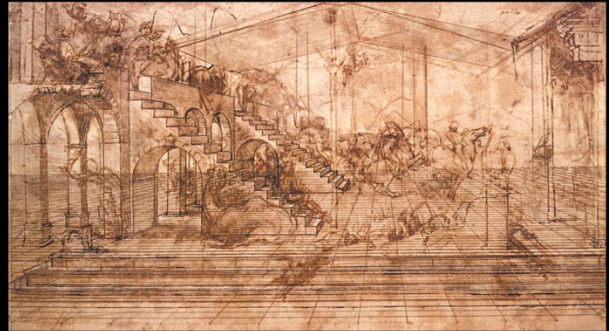
Im Rahmen meiner Arbeiten für Professor Gramaccini habe ich mich auch eigenständig – als interessierter Laie – mit gewissen Nebenaspekten des Themenkreises beschäftigt. Diese Abhandlung ist ein Produkt dieser Beschäftigung.

Kontakt mit dem Autor per E-Mail:
geor@gwick.ch

Georg Wick

Pavimentbilder in Zentralperspektive

Hypothesen und Spekulationen zu möglichen Methoden



EINLEITUNG

Thema dieser Abhandlung ist die Frage, nach welchen Verfahren Pavimentbilder, die zwischen 1340 und 1520 entstanden sind, hergestellt wurden. Konkreter: Was sind mögliche Methoden bei der Platzierung der Transversalen (Querlinien) im Pavimentbild. Der Einfachheit wegen beschränke ich mich auf den Begriff «Pavimente», obwohl «Soffitte» auch mitgemeint sind. Hingegen habe ich vergleichbare Strukturen in Seitenwänden nicht berücksichtigt.

Im Fokus der Betrachtungen stehen ganz besonders numerische Methoden. Anlass dafür ist die folgende Hypothese:

Neben konstruktiven wurden diverse numerische Methoden praktiziert. Das heißt: die von Alberti in «De Pictura, 19» erwähnte Methode der Zweidrittung war kein Einzelfall.⁰¹

Die darauf aufbauenden Folgerungen sind nur **Spekulationen**, solange man für diese Hypothese fast keine Belege in historischen Textquellen finden kann.

Im **ERSTEN TEIL** soll die «**korrekte frontale Zentralperspektive**» von Pavimenten vorgestellt werden:

- ihr Konzept,
- ihre charakteristischen Eigenschaften,
- die Indizien, welche dafür sprechen, dass ein Pavimentdarstellung eine solche Abbildung ist,
- eine einfache Anleitung für ihre konstruktive Realisierung.

Im **ZWEITEN** und im **DRITTEN TEIL** werden Pavimentdarstellungen thematisiert, die mit Hilfe einer **numerischen Methode** entstanden sein könnten.

Für die bekannteste dieser Methoden, die «Zweidrittung», gibt es den Beleg in Albertis «De Pictura». ⁰¹ Bei ihr wird gerechnet und abgemessen. Das fortgesetzte Dreiteilen kann zwar auch konstruktiv durchgeführt werden. Das ist aber viel zu aufwendig. Meine Vorstellung, wie die Zweidrittung – und eventuell andere numerische Methoden – an Malerwerkstätten praktiziert wurde, ist die folgende:

RECHNEN

Es wird eine Zahlenfolge berechnet. Sie soll die Abfolge der Transversalen-Bilder (Querlinien-Bilder) festlegen.

ABMESSEN

Die Zahlenreihe wird mit einem geeigneten Maßstab auf eine Leiste übertragen, die als Messlatte dient.

ÜBERTRAGEN

Die Messpunkte auf der Messlatte werden in das geplante Pavimentbild übertragen, womit die Lagen der Transversalen (Querlinien) festgelegt werden.

So können – mit einer einzigen Messlatte – Transversalenabfolgen in unterschiedlichen Dichten angefertigt werden. Je nachdem, wie stark die Messlatte gegenüber der Grundlinie geneigt ist.

Etwas in dieser Art ist gemeint, wenn im Folgenden von einer **numerischen Methode** die Rede ist.

Albertis Hinweis auf die Zweidrittung zeigt, dass es Leute gab, die nach einer numerischen Methode zur Platzierung der Querlinien suchten. Meine Überzeugung ist, dass außerdem noch andere numerischen Verfahren ausprobiert wurden, auch wenn es dafür fast keine historischen Belege gibt.⁰²

Diese Überzeugung ist der Antrieb für meine Spekulationen im **ZWEITEN** und im **DRITTEN TEIL**.

ERSTER TEIL

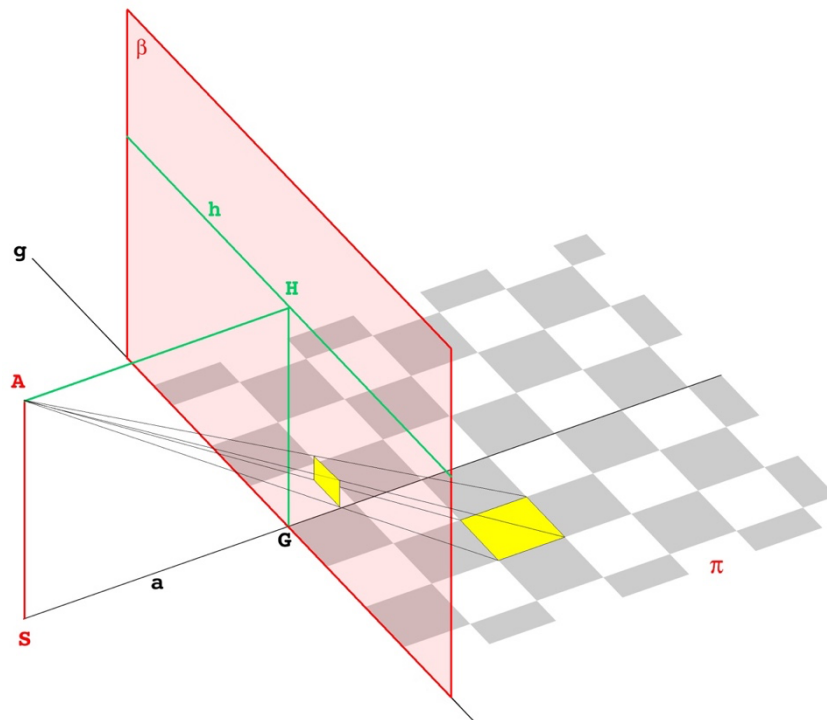
DIE NEUAUSRICHTUNG

Im Verlauf des 14. Jahrhunderts entsteht eine neue Vorstellung darüber, was ein Bild leisten könnte, leisten sollte. Das Bild soll Stellvertreter sein für den Gegenstand. In unserem Fall: Das Bild des Paviments soll im (einen) Auge des Betrachters den gleichen Effekt erzeugen wie das Paviment selber.

Wie das praktisch realisiert werden kann, beschreiben Konstruktionsanleitungen bei Alberti⁰¹, della Francesca⁰³, Gaurico⁰⁴ und anderen.

SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DIESER VORSTELLUNG

[anhand eines Paviments aus rechteckigen Fliesen, das eine ganze Halbebene füllt]



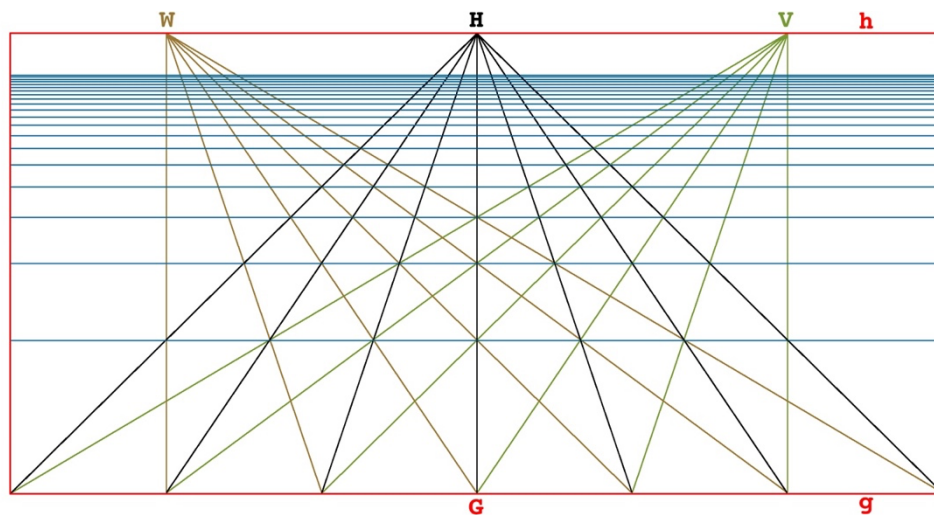
Erklärungen und Bezeichnungen :

- π ist Ebene des Paviments, $\mathbf{g}$ seine Frontlinie («Grundlinie»).
- β ist die «Bildebene», $\mathbf{A}$ das Auge des Bildbetrachters.
- Die Senkrechte zu π durch $\mathbf{A}$ schneidet π im Punkt $\mathbf{S}$, dem «Fußpunkt» bzw. «Standpunkt» des Bildbetrachters.
- Die Senkrechte zu $\mathbf{g}$ durch $\mathbf{S}$ – bezeichnet mit $\mathbf{a}$ – ist die Symmetrieachse des Paviments. Sie schneidet $\mathbf{g}$ im Punkt $\mathbf{G}$.
- Die Parallele zu $\mathbf{a}$ durch $\mathbf{A}$ schneidet die Bildebene im «Hauptpunkt» $\mathbf{H}$.
- Die Parallele zu $\mathbf{g}$ durch $\mathbf{H}$ ist der «Horizont» $\mathbf{h}$. $\mathbf{GH}$ ist das Bild von jenem Teil von $\mathbf{a}$, der im Paviment liegt.
- $\mathbf{g}$ und die Parallelen zu $\mathbf{g}$ durch Seiten von Fliesen nennen wir die «Querlinien des Paviments».
Die Fliesen zwischen zwei benachbarten Querlinien bilden einen «Querstreifen des Paviments».
- $\mathbf{a}$ und die Parallelen zu $\mathbf{a}$ durch Seiten von Fliesen nennen wir die «Tiefenlinien des Paviments».
Die Fliesen zwischen zwei benachbarten Tiefenlinien bilden einen «Tiefenstreifen des Paviments».
- Aneinander hängende Diagonalen von Fliesen bezeichnen wir als «Diagonallinien» des Paviments,
Die – aus Sicht des Bildbetrachters – nach rechts tendierenden heißen «v-Diagonallinien»,
sie enthalten die «v-Diagonalen der Fliesen».
Die – aus Sicht des Bildbetrachters – nach links tendierenden heißen «w-Diagonallinien»,
sie enthalten die «w-Diagonalen der Fliesen».

Eigenschaften dieser Zentralprojektion:

- Die Abbildung ist «geradentreu». Was im Paviment gerade ist, ist auch im Bild gerade.
- Die Bilder von Parallelen zu **g** (in der Pavimentebene) sind auch Parallelen zu **g** (in der Bildebene **β**). Insbesondere: Die Bilder aller Querlinien des Paviments sind Parallelen zu **g** (in der Bildebene **β**).
- Die Fluchtpunkte aller Geraden in der Ebene des Paviments haben Bilder, welche auf dem Horizont **h** liegen.
- Parallele Geraden in der Ebene des Paviments haben denselben Fluchtpunkt, dessen Bild auf dem Horizont **h** liegt.
- Das Bild des Fluchtpunktes von **a** ist **H**.
H ist auch das Bild der Fluchtpunkte aller Parallelen zu **a**, insbesondere aller Tiefenlinien des Paviments.
- Die v-Diagonallinien des Paviments haben denselben Fluchtpunkt, dessen Bild **V** auf dem Horizont **h** liegt.
- Die w-Diagonallinien des Paviments haben denselben Fluchtpunkt, dessen Bild **W** auf dem Horizont **h** liegt.

Das perspektivische Bild eines Paviments



Man beachte die – im Weiteren benutzte – abkürzende Schreibweise:

«Bild von Objekt» wird ersetzt durch **«Objekt»** (fett, kursiv, grün).

«Bilder von Objekten» wird ersetzt durch **«Objekte»** (fett, kursiv, grün).

Fliesen des ersten Querstreifens und ihre Diagonalen:

Von links nach rechts werden die **v-Diagonalen** kontinuierlich im Gegenuhrzeigersinn verdreht.

Von rechts nach links werden die **w-Diagonalen** kontinuierlich im Uhrzeigersinn verdreht.

Fliesen desselben Tiefenstreifens haben zwar die gleichen Winkel an den Ecken, sind einander aber **nicht ähnlich**.

Die **v-Diagonallinien** sind **nicht zueinander parallel**. Die **w-Diagonallinien** sind **nicht zueinander parallel**.

Aneinanderhängende Diagonalen von Fliesen, die keine Seite, aber eine Ecke gemeinsam haben, **haben die gleiche Richtung!**

ANMERKUNG: Dieses Charakteristikum ist zur Nagelprobe dafür geworden, ob ein Pavimentbild «korrekt», «gut», «richtig» konstruiert wurde. So schreibt zum Beispiel Leon Battista Alberti (De Pictura, 20) am Schluss der Ausführungen zu seiner Pavimentkonstruktion:

«Qui quidem quam recte descripti sint inditio erit, si una eademque recta continuata linea in picto pavimento co-adiunctorum quadrangulorum diameter sit.»

Übersetzung: «Ob diese richtig eingezeichnet sind, stellt sich dann heraus, wenn eine und dieselbe gerade Linie im Pavimentbild die Diagonalen von mehreren aneinanderreichten Vierecken ist.»⁰¹

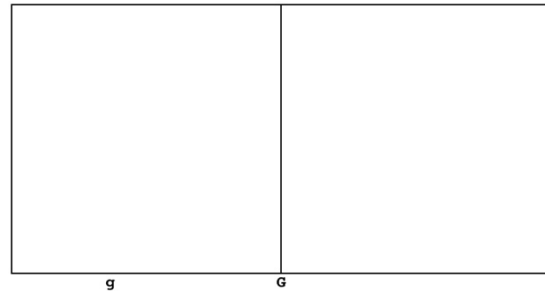
Die Nagelprobe für ein korrekt (frontal-)perspektivisches Bild eines Paviments

- **Aneinanderhängende v-Diagonalen** liegen auf einer Geraden.
Alle Geraden dieser Art schneiden sich im «Fluchtpunkt» **V** auf dem Horizont.
- **Aneinanderhängenden w-Diagonalen** liegen auf einer Geraden.
Alle Geraden dieser Art schneiden sich im «Fluchtpunkt» **W** auf dem Horizont.

EIN EINFACHES REZEPT FÜR EIN KORREKTER PAVIMENTBILD

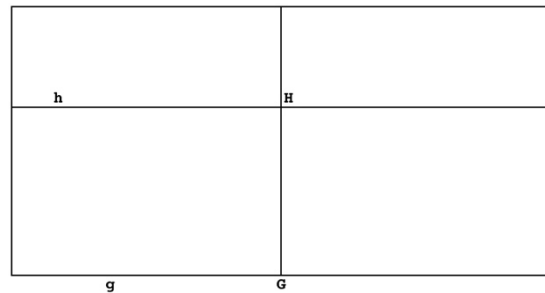
Platziere auf dem Zeichenblatt das Rechteck, das die Frontwand darstellen soll, samt senkrechter Mittellinie!

Damit sind Grundlinie **g** und **G** gegeben.



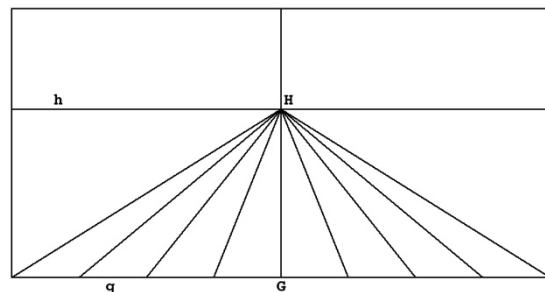
Platziere parallel zu **g** den Horizont **h**!

Damit sind **h** und Hauptpunkt **H** gegeben.



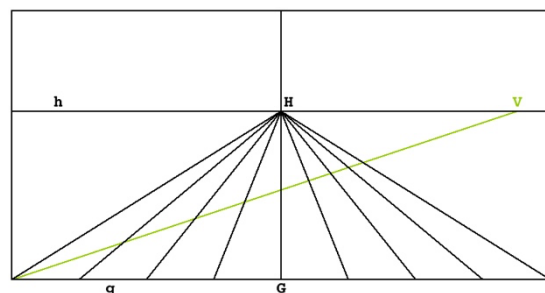
Unterteile die Grundlinie in gleichlange Strecken und verbinde die Teilungspunkte mit dem Hauptpunkt **H**!

Dadurch sind die *Tiefenlinien des Paviments* gegeben.



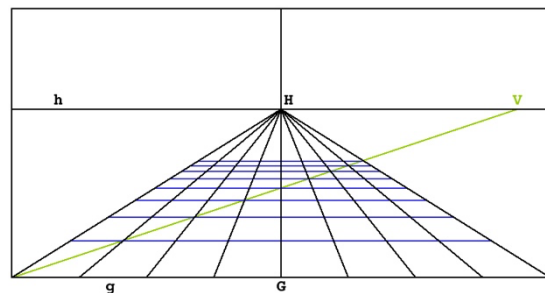
Platziere auf dem Horizont **h** den Fluchtpunkt **v** der v-Diagonalen und verbinde den äußersten linken Teilungspunkt auf **g** mit **v**!

Damit ist eine *Diagonalenlinie* gegeben.



Zeichne je eine zu **g** parallele Strecke durch jeden Schnittpunkt dieser *Diagonalenlinie* mit einer *Tiefenlinie des Paviments*!

Damit sind die *Querlinien* («Transversalen») des *Paviments* gegeben.



Rezepte wie dieses wurden schon im frühen 15. Jahrhundert ausgeführt, vermutlich auch bevor Alberti 1436 seine Pavimentkonstruktion in «De Pictura, 19 & 20» veröffentlicht hat.⁰¹

Dabei war man sich noch nicht bewusst, und es spielte auch keine Rolle, dass die Fluchtpunkte der Diagonalen bestimmend sein könnten für die Sehdistanz, i.e. Abstand des Auges **A** von der Bildebene **β**. Dieser Bezug wurde erst im frühen 16. Jahrhundert relevant. Es ist darum keine gute Idee, dieses Rezept mit dem Begriff «Distanzverfahren» zu bezeichnen.

Wahrscheinlich wurden bei perspektivisch korrekten Pavimentkonstruktionen eher dieses und dazu verwandte Rezepte angewandt als die etwas umständlichere Methode aus Albertis «De Pictura» mit dem auf einem Beiblatt platzierten Seitenriss. («*Habeo areolam ...*» De Pictura, 20).⁰¹

Mit der Nagelprobe kann man Pavimentbildern die Eigenschaft «perspektivisch korrekt konstruiert» zuordnen. Solche Bilder findet man bei Masolino, Donatello, Pisanello, Fouquet, Bouts, della Francesca, Botticelli, da Vinci, Giovanni Bellini, Viator und in einigen Zeichnungen des – wohl fälschlicherweise Jacopo Bellini zugeschriebenen⁰⁵ – Louvre Skizzenbuches (zum Beispiel: RF1509).



ZWEITER TEIL

Thema sind hier Pavimentdarstellungen, die **nicht** mit Hilfe einer **konstruktiven** Methode entstanden sind.

Hier werden **numerische Verfahren**, speziell «**Proportionalverfahren**», untersucht, deren prominentester Vertreter die «Zweidrittellung» ist. Von diesem Typus ist in der Fachliteratur oft die Rede, obwohl Pavimentbilder, die auf diese Weise entstanden sind, nur selten zu finden sind.

Das «Proportionalverfahren»

Vor und nach Alberti wurden Pavimentbilder nach diversen Rezepten zubereitet. Entweder kannte man die «korrekte Methode» (noch) nicht, oder die Resultate anderer Rezepte entsprachen besser dem Geschmack, der Mode oder der Werkstatt-Tradition.

Als mögliche Alternative erwähnt Alberti in «De Pictura, 19», die fortgesetzte «Zweidrittellung» der Abstände zwischen aufeinander folgenden Querlinien (Transversalen):

«Hic essent nonnulli qui unam ab divisa æquedistantem lineam intra quadrangulum ducerent, spatiumque, quod inter utrasque lineas adsit, in tres partes dividerent. Tum huic secunde æquedistanti lineæ aliam item æquedistantem hac lege adderent, ut spatium, quod inter primam divisam et secundam æquedistantem lineam est, in tres partes divisum una parte sui excedat spatium id quod sit inter secundam et tertiam lineam, ac deinceps reliquas lineas adderent ut semper sequens inter lineas esset spatium ad antecedens, ut verbo mathematicorum loquar, superbipartiens.»

Übersetzung: «An diesem Punkt angelangt, würden wohl einige eine – zur Grundlinie des Rechtecks parallele – Linie ziehen, dann den Abstand zwischen diesen zwei Linien dreiteilen. Im Abstand von zwei solchen Teilen würden sie darüber eine andere Linie zeichnen, und auf gleiche Weise würden zu dieser eine weitere hinzufügen, und noch eine weitere. Abgemessen wird also immer so, dass vom dreigeteilten Abstand zwischen der ersten und der zweiten Linie immer ein Teil fehlt beim Abstand zwischen der zweiten und der dritten Linie. Und nacheinander würden sie Linien beifügen, sodass immer der folgende zum vorhergehenden Abstand (zwischen den Linien) – wie es mit den Worten der Mathematiker gesagt wird – 'überzweiteilend' ist.»⁰¹

Es gibt zwei Möglichkeiten den Anfang dieser Textstelle zu deuten:

ERSTENS

Es gab tatsächlich einige Meister in Perspektive, welche die Zweidrittellung, also ein numerisches Verfahren propagierten.

ZWEITENS

Alberti – als routinierter Arithmetiker mit der geometrischen Reihe und ihrer Konvergenz vertraut – ist selber erst mal auf die Idee gekommen, die er aber – als mindestens so routinierter Geometer – durch eine bessere Idee ersetzt hat. Hat er dann vielleicht mit den **nonnulli** nur sich selber gemeint?

Ich bevorzuge die erste Lesart.

Wie kommt man auf die Idee der Zweidrittellung?

Die Hauptprämisse (conditio sine qua non) für eine akzeptable Abfolge der Breiten der **Querstreifen** ist:

Die **Querstreifen**-Breiten bilden eine, stetig abnehmende,
gegen 0 konvergierende, Zahlenfolge.

Als zusätzliche Prämisse wäre denkbar:

Die Querlinien nähern sich einer Grenzlinie,
dem «Querlinien-Horizont».

Diese Prämisse zweiten Ranges spielte nicht immer eine Rolle. Entweder hatte man zu wenig Ahnung von Grenzübergängen, oder man kam ganz gut ohne sie klar. Doch für den Mathematiker Alberti war sie bestimmt von Bedeutung. Wohl auch für andere Gelehrte und Maler, die Kenntnis hatten von der Vorliebe der Scholastiker für unendliche Reihen.

Da drängt sich eine geometrische Reihe geradezu auf, mit der beide Prämissen erfüllt werden können. Warum gerade $\frac{2}{3}$ als Verkürzungsfaktor erwähnt wird, ist nicht klar. Hätte Mantegna mit der geometrischen Reihe geliebäugelt, wäre seine Wahl sicher auf einen Faktor näher bei 1 (zum Beispiel $\frac{11}{12}$) gefallen. Siehe DRITTES ADDENDUM.

«Konjunkte Zweidrittellung»

Man beginnt mit der Grundlinie **g**, dem Punkt **G** und einer Senkrechten zu **g** bei **G**.

Die **erste Querlinie** über **g** wird eingezeichnet.
Ihren Abstand von **g** nehmen wir als Maß (=1).

Die Breiten der **Querlinien** sind dann:

$$1 \quad | \quad 1 \cdot \frac{2}{3} \quad | \quad 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad | \quad 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad | \quad \dots$$

Die unendliche geometrische Reihe

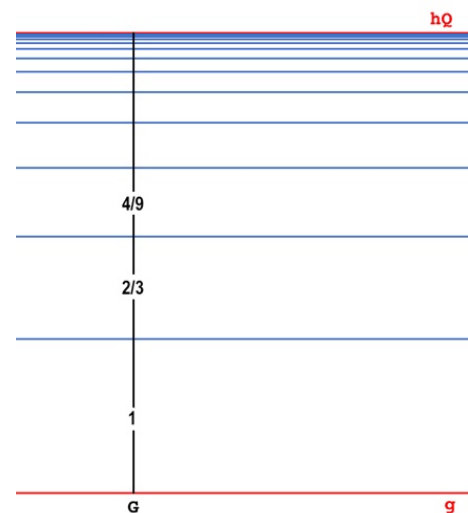
$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \\ s &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \end{aligned}$$

hat den Wert 3 nach der Summenformel

$$s = a / (1 - q) = 1 / (1 - q) = 1 / (1 - \frac{2}{3}) = 1 / (\frac{1}{3}) = 3$$

Das liefert uns die Lage des Horizonts, der zur Abfolge der **Querlinien** passt. Wir bezeichnen ihn mit **hQ**.

Also: Die Breite des **ersten Streifens** ist immer ein Drittel der Breite des ganzen Pavimentbildes (von **g** bis **hQ**).



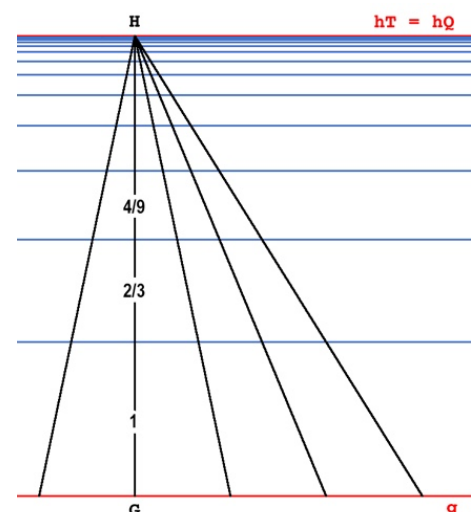
Den Horizont der **Tiefenlinien** bezeichnen wir mit **hT**.

Das Verfahren bezeichnen wir

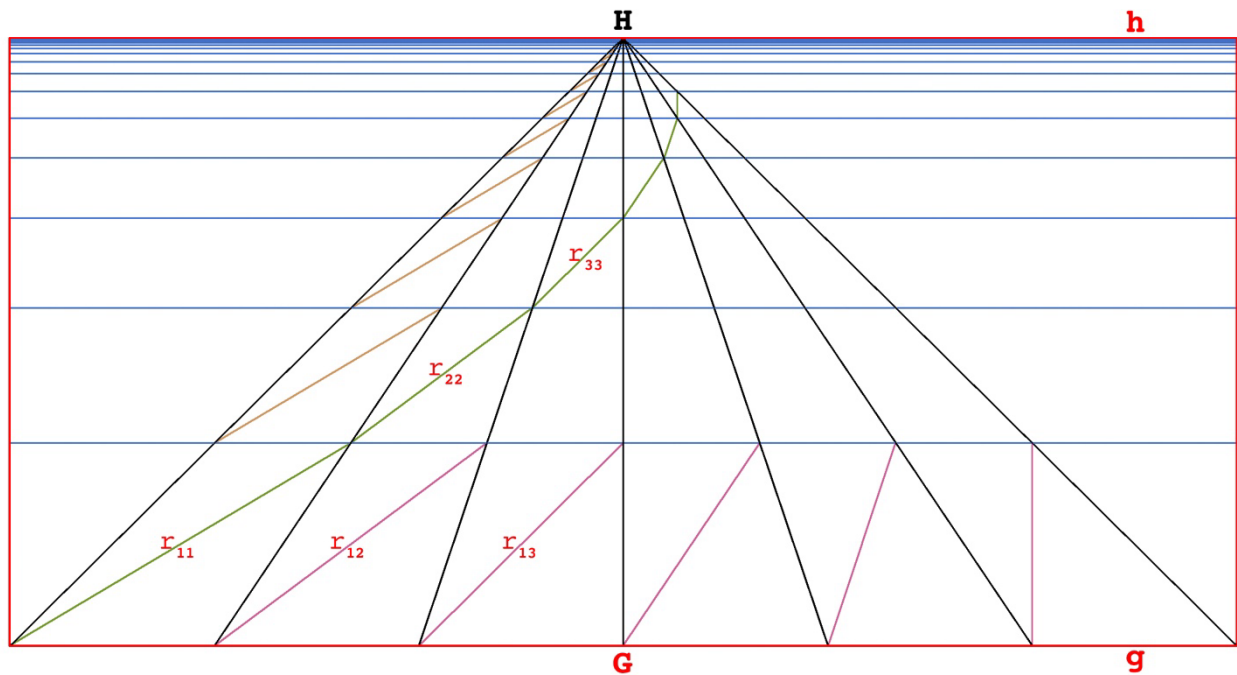
- als «konjunkt», wenn **hT = hQ**
d.h. wenn der Hauptpunkt **H** auf **hQ** liegt,
- andernfalls als «disjunkt».

In einigen Bildern aus den Jahren 1340 bis 1520 ist **hT** verschieden von **hQ**.

Meistens liegt dann **hT** oberhalb von **hQ**.



DAS BILD EINES PAVIMENTS MIT KONJUNKTEM ZWEIDRITTELUNGSVERFAHREN



1. ANMERKUNG:

Wie schon früher erwähnt, werden im *ersten Querstreifen* von links nach rechts die *v-Diagonalen* kontinuierlich im Gegen-
uhreigersinn verdreht.

2. ANMERKUNG:

Bei diesem Verfahren sind Bilder von *Fliesen desselben Tiefenstreifens* einander ähnlich. Die *v-Diagonallinien* in einem *Tiefenstreifen* sind darum zueinander parallel (ebenso die *w-Diagonallinien*).

Das bedeutet für die Richtungen (nicht die Längen!) der *Diagonalen*:

$$\mathbf{r}_{22} = \mathbf{r}_{12} \quad \mathbf{r}_{33} = \mathbf{r}_{13} \quad \text{usw.}$$

Darum bilden die aufeinander folgenden *Diagonalen* mit den Richtungen $\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} \cdot \mathbf{r}_{33}$ usw. einen nach links gekrümmten Streckenzug, der bei einer Weiterführung ad infinitum auf den Hauptpunkt **H** zustrebt.

Und verallgemeinert:

- *Aneinander hängende v -Diagonalen* bilden einen **nach links gekrümmten** Streckenzug hin zu **H**.

Und analog:

- *Aneinander hängende w-Diagonalen* bilden einen **nach rechts gekrümmten** Streckenzug hin zu **H**.

Wichtig: Beim konjunktiven Proportionalverfahren entstehen unmöglich

- *aneinanderhängende v-Diagonalen*, die nach rechts gekrümmt sind,
- *aneinanderhängende w-Diagonalen*, die nach links gekrümmt sind.

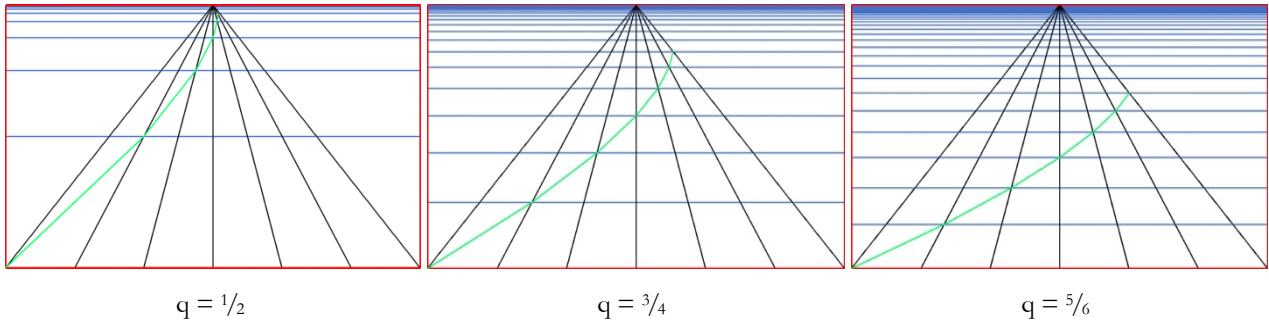
Verallgemeinerung: konjunktes Proportionalverfahren mit beliebigem Verkürzungsfaktor

Das Verfahren funktioniert für jede Wahl des Verkürzungsfaktors q , wenn $0 < q < 1$. Bei einem q -Wert kleiner als $1/2$ sind die Verzerrungen aber nicht mehr im erträglichen Rahmen.

Aus den bereits erwähnten Gründen gilt auch hier:

- Aneinander hängende *v-Diagonalen* bilden einen **nach links gekrümmten** Streckenzug hin zu **H**.
- Aneinander hängende *w-Diagonalen* bilden einen **nach rechts gekrümmten** Streckenzug hin zu **H**.

BILDER EINES PAVIMENTS BEI KONJUNKTEM PROPORTIONALVERFAHREN



So gekrümmte Diagonalenzüge in einem Bild nähren den Verdacht, dass ein Proportionalverfahren im Spiel war.

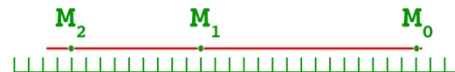
Bei einem solchen Verdacht bestimmt man eine Näherung von q durch Messungen auf einer möglichst langen Strecke schief über die beiden **ersten Querstreifen**. Auf dieser Strecke werden markiert:

M_0 auf der unteren, M_1 auf der mittleren und M_2 auf der oberen **Querlinie**.

Man misst die Längen der Teilstrecken M_2M_1 und M_1M_0 . Dann bestimmt man q so:

$$q \approx \frac{\text{Länge von } M_2M_1}{\text{Länge von } M_1M_0}$$

★ Erste Untersuchung



M_2M_1 misst ungefähr 9 Einheiten.

M_1M_0 misst ungefähr 15 Einheiten.

Daraus die Vermutung:

$$q \approx \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Bild01

Teil einer Zeichnung
von Marco Zoppo di Squarcione,
«Sei bambini su un pavimento, quattro lottanti»,
Fol.15 aus dem Rosebery Album
im British Museum London,
datiert: 1465-1474 (?)

Nun ist es aber so, dass die dann folgenden **Querlinien** nicht mal annähernd via Multiplikation der Abstände mit $3/5$ entstanden sind. Das heißt: Das Paviment wurde **nicht** gezeichnet mit Hilfe eines Proportionalverfahrens.

Wie hier werden viele Bilder mit verdächtig gekrümmten Diagonalzügen dieselbe Diagnose erhalten:

Nicht konstruiert mit dem Proportionalverfahren!

Mit der Proportionalverfahren konstruierte Pavimentbilder – insbesondere solche mit Zweidrittteilung – sind schwer zu finden; konjunkte gibt es vielleicht gar keine.

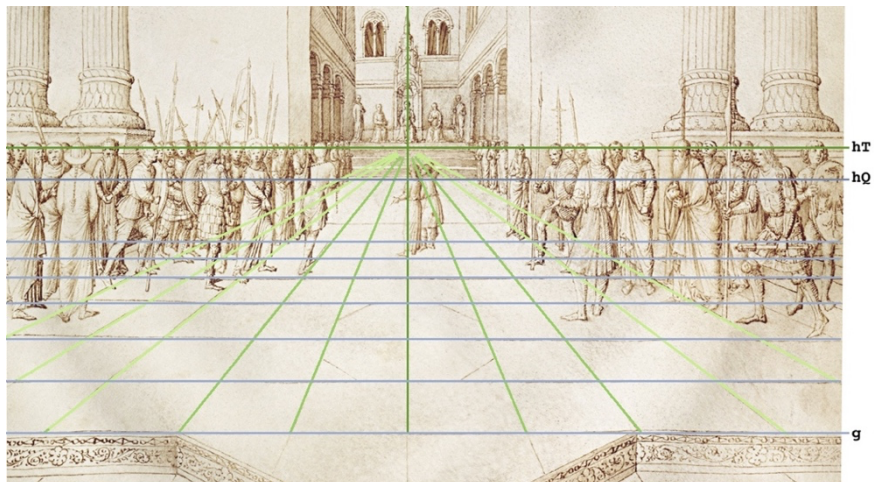
★ Zweite Untersuchung

Teil einer Zeichnung aus dem Louvre Skizzenbuch (RF1503)

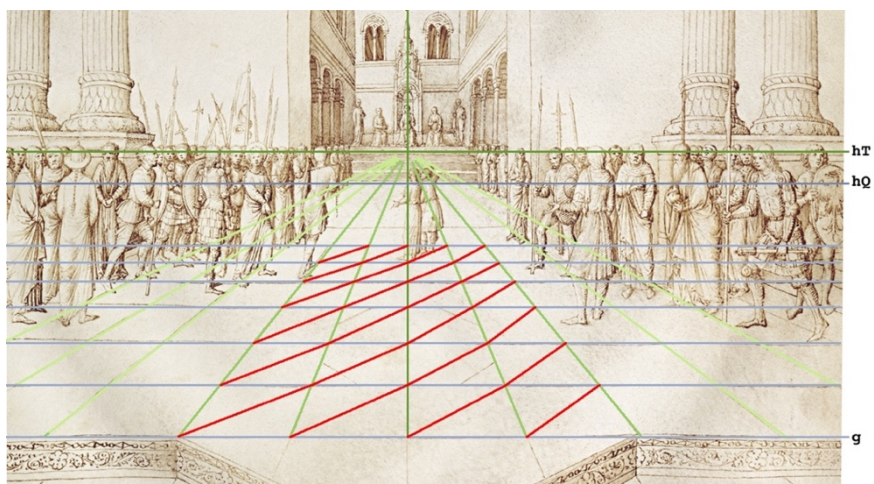
Bild02 «Cristo innanzi a Pilato», datiert: ca. 1450 (?)



Mit etwas gutem Willen kann man diesem Bild eines Paviments (mit sechs Querstreifen) eine Proportionalkonstruktion zuschreiben. Die **Querstreifen 2 bis 6** entstehen durch fortgesetzte Multiplikation der Breite mit ungefähr $\frac{4}{5}$. Ihr Horizont ist **hQ**. Die **Tiefenlinien** braucht man bei der Platzierung der Transversalen nicht.



Der Fluchtpunkt der **Tiefenlinien** liegt auf **ihrem** Horizont **hT**, der deutlich höher als **hQ** liegt. Das Bild ist also – wenn überhaupt – ein **Beispiel für das «disjunkte» Proportionalverfahren** (cf. nächster Abschnitt). Mit der – bewussten oder unbewussten – Platzierung von **hT** über **hQ** nimmt man dem starken Drall der Streckenzüge von **aneinanderhängenden Diagonalen**, der beim konjunkten Proportionalverfahren zu beobachten ist, etwas von seiner Schärfe («Dralldämpfung»). Auch dazu mehr im nächsten Abschnitt.



«Disjunkte» Proportionalverfahren

Bei einem «disjunkten» Proportionalverfahren ist **hT**, der Horizont der **Tiefenlinien**, verschieden von **hQ**, dem Horizont der **Querlinien**. Für eine «Dralldämpfung» muss **hT** oberhalb von **hQ** gewählt werden.

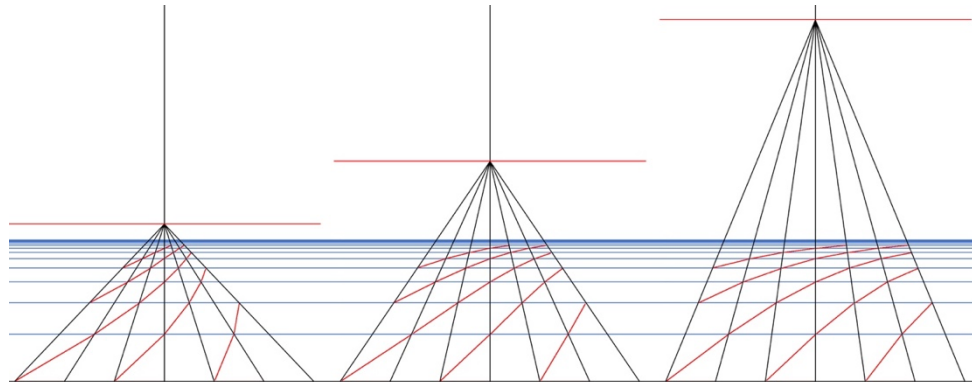
ANMERKUNG:

Die **Fliesen eines Tiefenstreifens** sind jetzt nicht mehr zueinander ähnliche Trapeze.

Nun beschränken wir uns – wie schon in der Zeichnung oben – auf **v-Diagonalen**.

ANMERKUNG:

Versetzt man **hT** sukzessive immer höher über **hQ**, wird der Linksdrall der **v-Diagonalenzüge** mehr und mehr gedämpft. Irgendwann werden sie zu sehr schwach gekrümmten Links-Rechts-Kurven, und schließlich bekommen sie einen immer stärkeren Rechtsdrall. Die Idee, durch eine geeignete Platzierung von **hT** gerade **Diagonalenzüge** zu erzeugen, ist nicht realisierbar. Man kann so höchstens **zwei** aneinanderhängenden **Diagonalen** die gleiche Richtung geben.



Das Bild ganz rechts könnte zur Vermutung verleiten, dass Pavimentbilder, die nach rechts gekrümmte **v-Diagonalenzüge** aufweisen mit einem disjunkten Proportionalverfahren angefertigt wurden. Nun zeigt aber keines von den untersuchten Pavimentbildern (mit nach rechts gekrümmten v-Diagonalenzügen) ein Indiz für ein Proportionalverfahren.

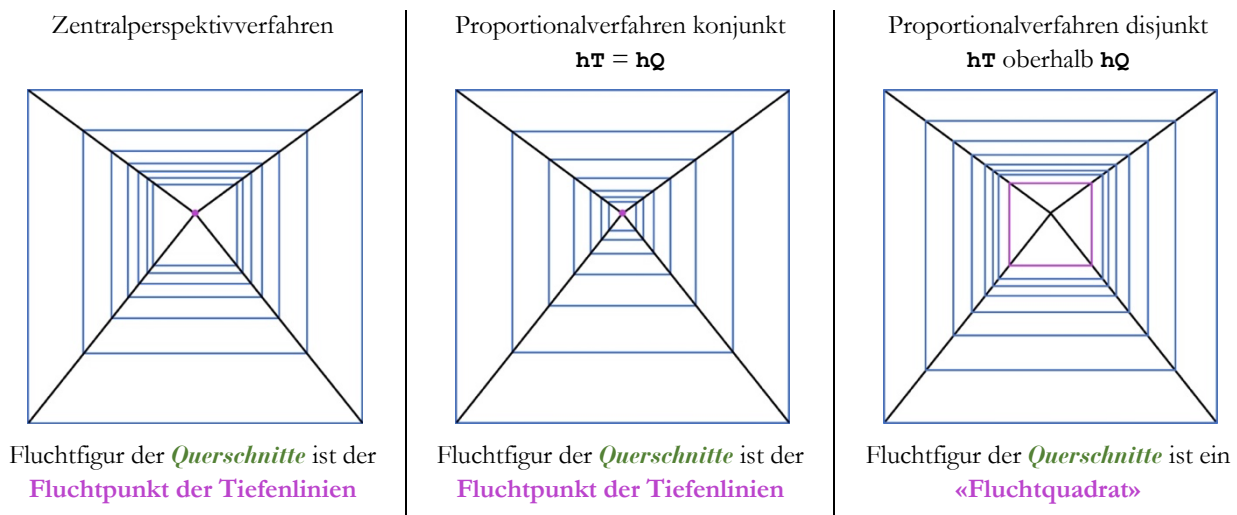
ANMERKUNG:

Wenn Pavimentbilder mit dem Proportionalverfahren entstanden sind und nach rechts gekrümmte **v-Diagonalenzüge** aufweisen, **dann muss es sich um ein disjunktes Verfahren handeln**. Das heißt, dass **hT** verschieden von **hQ** ist, und genauer: dass **hT** **deutlich oberhalb von hQ** liegt.

AUSWIRKUNGEN AUF DIE FLUCHTOBJEKTE:

Das gewählte Konstruktionsverfahren hat eine entscheidende Auswirkung auf Abfolge der Bilder von äquidistanten Raumquerschnitten.

Bild eines Raumquaders mit quadratischen Querschnitten bei einer Konstruktion mit einem



Die zweite Untersuchung hat gezeigt, dass man – mit etwas gutem Willen – der Pavimentdarstellung im **Bild02** ein disjunktes Proportionalverfahren zuordnen kann.

Nun wird ein weiteres Bild untersucht, bei dem möglicherweise das disjunkte Proportionalverfahren angewandt wurde.

✱ Dritte Untersuchung

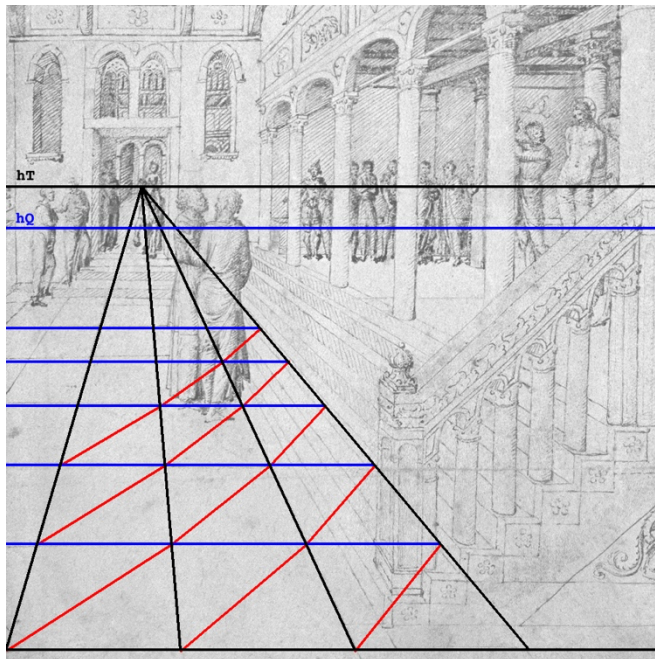


Bild03

Teil einer Zeichnung
aus dem Louvre Skizzenbuch
RF 427: «Flagellazione»
datiert: 1450 (?)

Mit den **Tiefenlinien** bestimmt man deren
Fluchtpunkt und deren Horizont **hT**.

Auf einer **Tiefenlinie** werden die Abstände
der **Querlinien** vermessen:

Die Abstände entwickeln sich annähernd
durch fortgesetzte Multiplikation mit $\frac{3}{4}$.

Numerisch kann die Lage von **hQ**, dem Ho-
rizont der **Querlinien** bestimmt werden.

N.B.

Die vierte Querlinie weicht am meisten von
diesem Muster ab, ein «Ausreißer» quasi.

✱ Vierte Untersuchung,
nicht an einem Paviment, sondern an einem Tonnengewölbe

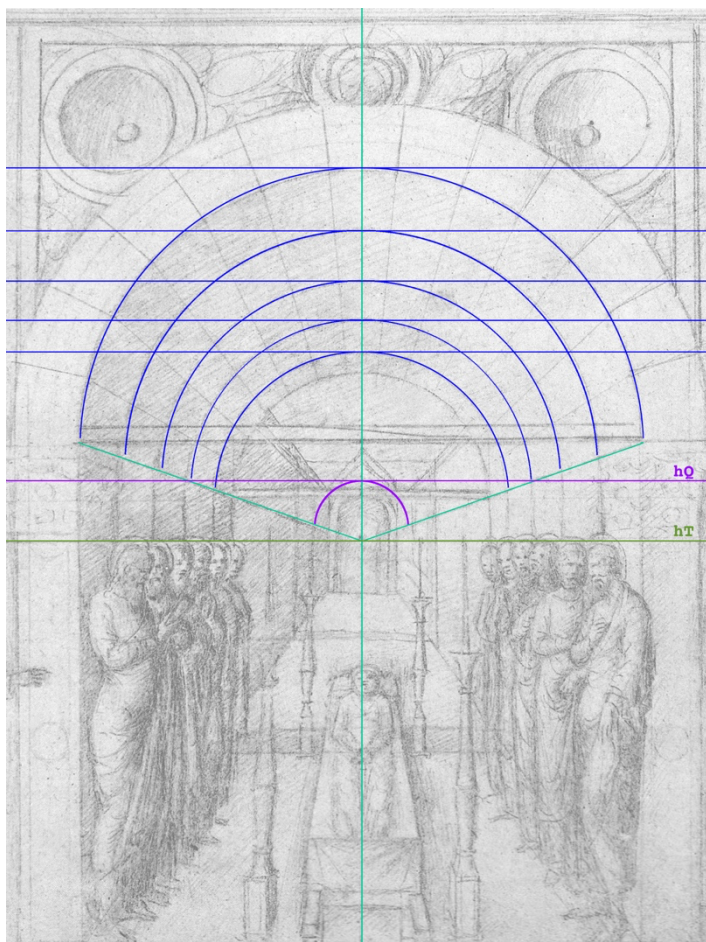


Bild04

Teil einer Zeichnung
aus dem Londoner Skizzenbuch
im British Museum London
BM inv 66: «Morte della Vergine»
datiert: 1440-1470 (?)

Mit den **Tiefenlinien** bestimmt man de-
ren Fluchtpunkt und deren Horizont
hT.

Auf der Symmetrieachse werden die
Abstände der **Querbogen (Gewölbe-
querschnitte)** an ihrem Scheitel ver-
messen:

Aus dem obersten Abstand N°1 entwi-
ckeln sich die Abstände N°2, N°3 und
N°4 ungefähr durch fortgesetzte Mul-
tiplikation mit $\frac{4}{5}$.

Numerisch kann die Lage des Hori-
zonts der **Querbogen hQ** bestimmt
werden.

Konsequenz:

Die **Fluchtfigur** der **Querbogen** ist
dann nicht unendlich klein!

Am Ende dieses Abschnitts über Proportionalverfahren soll gezeigt werden, dass eine Zweidrittelung, die bei einzelnen Querstreifen recht selten ist, öfter gefunden werden kann, wenn Querstreifen gruppiert werden, zum Beispiel zu Paaren.

✱ Suche nach Spuren der «Zweidrittelung»

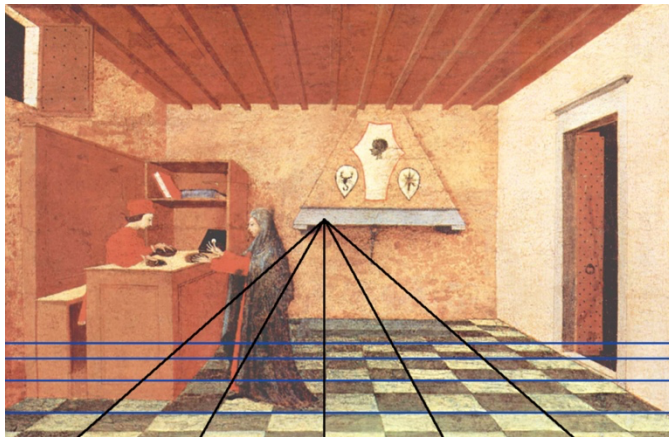


Bild05

Paolo Uccello
Un episodio degli «Miracoli dell'ostia»
Palazzo Ducale Urbino
datiert: 1469

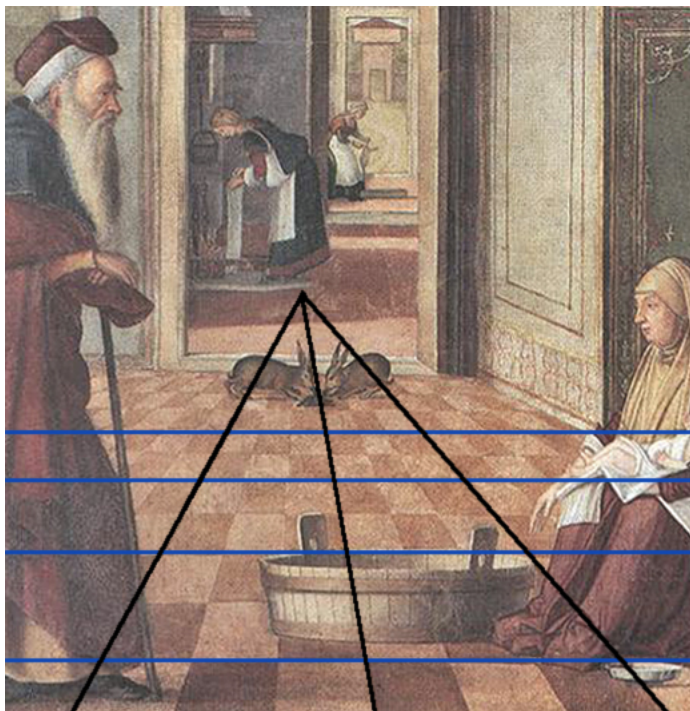


Bild06

Vittore Carpaccio
Dettaglio della
«Natività di Maria Vergine»
Accademia Carrara Bergamo
datiert: 1504

Bei diesen beiden Bildern kann annähernd eine – oben stark, unten schwach disjunkte – Zweidrittelung gefunden werden, wenn man nicht einzelne Querstreifen betrachtet, sondern Paare von Querstreifen.

N.B.

Auch bei **Bild02** und **Bild04** könnte eine solche disjunkte Zweidrittelung vorliegen, ist doch $(\frac{4}{5})^2 = 0.64 \approx \frac{2}{3}$.

Genauer gesagt: 0.64 ist 96% von $\frac{2}{3}$.

FOLGERUNG:

Unter all den vielen Pavimentbildern, welche die Nagelprobe (der korrekten Perspektivdarstellung) nicht bestehen, gibt es einige, denen man ein – meist disjunktes – Proportionalverfahren zuschreiben kann.

Es bleibt die Frage, warum Alberti ein Verfahren erwähnt, von dem es so wenige Spuren gibt. Vielleicht, weil es eine so naheliegende «Lösung» war. Die geometrische Reihe gehörte zum Knowhow, und die Wahl von Zweidrittel – einem Bruch vom Typ $\frac{N}{(N+1)}$ – als Verkürzungsfaktor passt gut in die jahrhundertelange Tradition des «Quadriviums». In den «artes arithmetica et musica» waren diese Brüche – und ihre Kehrbüche – von großer Bedeutung für Harmonien in Musik und Kunst.

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$		— $\frac{1}{x}$ —>		$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$	Oktav
$\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$	superbipartiens		sesquialtera	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	Quint
$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$	supertripartiens		sesquitercia	$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	Quart
$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$	superquadripartiens		sesquiquarta	$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$	große Terz
$\frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$	superquintipartiens		sesquiquinta	$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$	kleine Terz

EINE MÖGLICHE PRAKTISCHE DURCHFÜHRUNG DER ZWEIDRITTELUNG

Um die *Querlinien* in einem Pavimentbild mit Hilfe der Zweidrittelung festzulegen, wählt man einen fein unterteilten Maßstab mit einer kleinen Einheit E. Der Maßstab kann in einem beliebigen Winkel zur Grundlinie platziert werden.

Für die Breite des ersten *Querstreifens* wählt man am besten eine Dreierpotenz, zum Beispiel 243 E. Das heißt:

Breiten:

6. *Querstreifen*: 32 E
 5. *Querstreifen*: 48 E
 4. *Querstreifen*: 72 E
 3. *Querstreifen*: 108 E
 2. *Querstreifen*: 162 E
 1. *Querstreifen*: 243 E

Lagen:

Horizont bei 729 E
 6. *Querlinie* bei 454 E
 5. *Querlinie* bei 438 E
 4. *Querlinie* bei 414 E
 3. *Querlinie* bei 378 E
 2. *Querlinie* bei 405 E
 1. *Querlinie* bei 243 E
 Grundlinie bei 0 E

DRITTER TEIL

In diesem Teil wird nach weiteren Methoden für Pavimentdarstellungen gesucht, die – wie das Proportionalverfahren – **numerisch** die Lage der *Querlinien* festlegen.

ERSTE IDEE: Man übernimmt das Prinzip der fortgesetzten Multiplikation der *Querstreifen*-Breiten. Der Faktor soll aber nicht fixiert sein, sondern kontinuierlich zunehmen bis zum Wert 1 hin. Das leuchtet ein, denn kurz vor dem Horizont sind die *Querstreifen*-Breiten kaum mehr zu unterscheiden.

Dazu folgende Spekulation:

Schon lange waren unendliche Folgen und Reihen ein Lieblingssport für die Mathematiker unter den Scholastikern. Davon bekamen sicher auch deren Schüler an den Universitäten von Pavia und Padua etwas mit.

Sie konnten bei der Suche nach Favoriten für diese Faktoren sicher nicht übersehen:

die Brüche vom Typ $\frac{n}{n+1}$ (i.e. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8} \dots$)

ZWEITE IDEE: Man wählt *Querstreifen*-Breiten, deren Proportionen eine harmonische Folge bilden.

$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{1}{4} \mid \frac{1}{5} \mid \frac{1}{6} \mid \frac{1}{7} \mid \frac{1}{8} \dots$

Für beide Ideen kenne ich **keine historischen Quellen**. Das heißt aber nicht, dass keine solchen existieren.

Entwicklung der *Querstreifen*-Breiten nach der ersten Idee:

<i>Streifen</i> -Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	
Faktor	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	..
<i>Streifen</i> -Breite	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	

Daraus folgt:

Die beiden Ideen münden in dasselbe Verfahren, das wir als **«Harmonisches Verfahren»** bezeichnen.

Eine Computerzeichnung der Abfolge der **Querlinien** nach dem Harmonischen Verfahren und ...



... zwei der wenigen Bilder, in denen man – zumindest in **Teilen** des Paviments – Spuren eines Harmonischen Verfahrens vermuten könnte:

Bild07 Teil einer Zeichnung aus dem Louvre Skizzenbuch (RF1478r) · «Presentazione al tempio» (ca. 1450?)

Bild08 Giovanni di Paolo di Grazia · Dettaglio della «Annunciazione» · National Gallery of Art Washington (ca. 1435?)

Zu untersuchen ist noch, wo der – zu dieser **Querlinienfolge** passende – Horizont **h_Q** zu liegen käme. Gesucht ist also der Grenzwert von

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Im 14. Jahrhundert wusste man, dass diese sogenannte «Harmonische Reihe» keinen Grenzwert hat. Das heißt, dass man bei fortgesetztem Einzeichnen der **Querlinien** jeden noch so hohen Bildrahmen überschreiten müsste.

Wohl darum findet man kaum Spuren des Harmonischen Verfahrens.

Ist die ZWEITE IDEE vielleicht doch noch irgendwie zu retten? Zum Beispiel könnte man in der Folge der Faktoren noch Brüche dazwischenschalten, um den Vormarsch der **Querlinien** zu verlangsamen. Das ist die DRITTE IDEE.

DRITTE IDEE (für die ich auch keinen historischen Beleg gefunden habe) :

In der Folge der wachsenden Faktoren

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{7} \quad \frac{7}{8} \quad \dots$$

schafft man Zwischenräume durch Erweitern mit 2

$$\frac{2}{4} \quad \bullet \quad \frac{4}{6} \quad \bullet \quad \frac{6}{8} \quad \bullet \quad \frac{8}{10} \quad \bullet \quad \frac{10}{12} \quad \bullet \quad \frac{12}{14} \quad \bullet \quad \frac{14}{16} \quad \dots,$$

die man passend füllt.

$$\frac{2}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{10} \quad \frac{9}{11} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{11}{13} \quad \frac{12}{14} \quad \frac{13}{15} \quad \frac{14}{16} \quad \dots$$

Zu den Breiten der **Querstreifen**:

Streifen -Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Faktor	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{11}$	..
Streifen -Breite	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	...
Breite umgeformt	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{45}$	...

Zu den Lagen der **Querlinien**:

Linien -Nummer N	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Summand	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	...	
Linien -Lage	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{12}{5}$	...
Lage umgeformt	$\frac{3}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{12}{5}$	...

Die Lagen bilden also die Folge **Lage (N-te Querlinie) = $3 \cdot \frac{N}{(N+2)}$** , deren Grenzwert **3** ist.

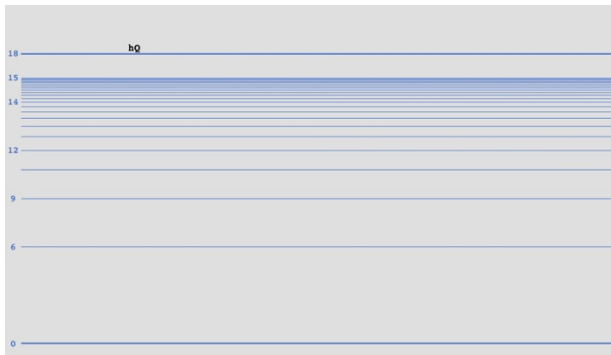
Damit ist die Lage von **h_Q** – dem Horizont, der zu den **Querlinien** passt – festgelegt.

Wir wählen nun eine neue Einheit durch Veränderung des Maßstabs im Verhältnis 1:6 .

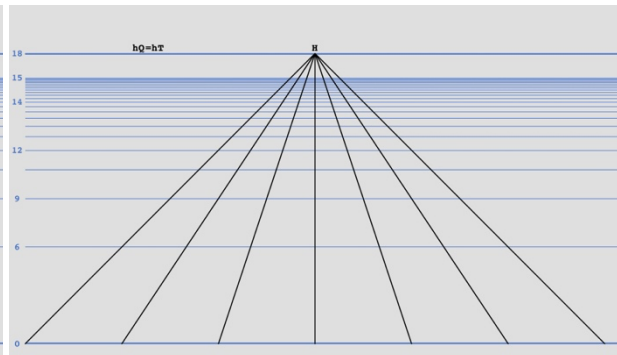
<i>Linien</i> -Nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	...	Horizont
<i>Linien</i> -Lage	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{3}$	...	3
<i>Linien</i> -Lage neu	0	6	9	10.8	12	12.9	13.5	14	...	18

Ein dazu passendes konjunktes Pavimentbild sieht so aus:

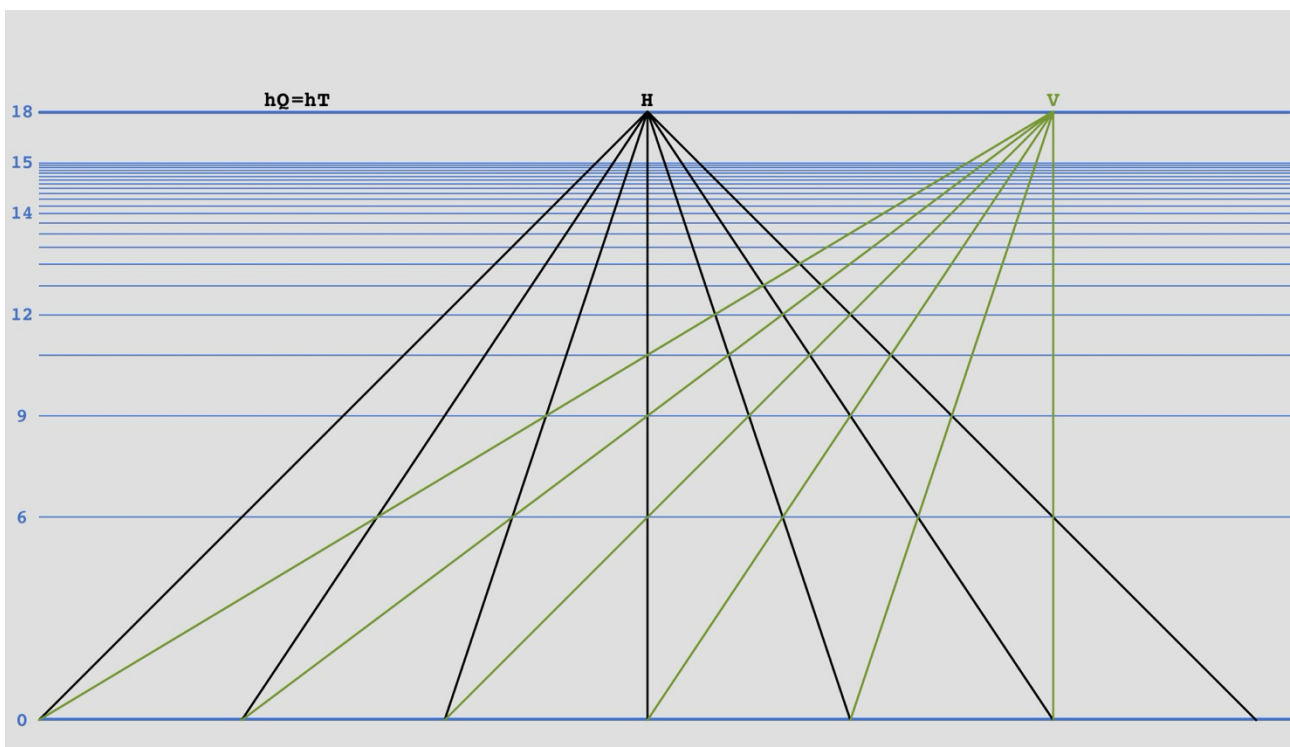
Erst einmal die *Querlinien* (mit Angabe einiger Lage-Maße)



dazu der Hauptpunkt H und die *Tiefenlinien*



schlussendlich noch dazu die *v-Diagonalenzüge*.



Das Pavimentbild besteht die Nagelprobe! Das Bild ist frontal-perspektivisch korrekt. Was hier vorliegt ist also

eine **numerische** Methode für eine «korrekte frontale Zentralperspektive»

Das ist eine Überraschung! Für uns heute nicht, weil wir den Zusammenhang von Perspektive und «gebrochen-linearen Funktionen» kennen.

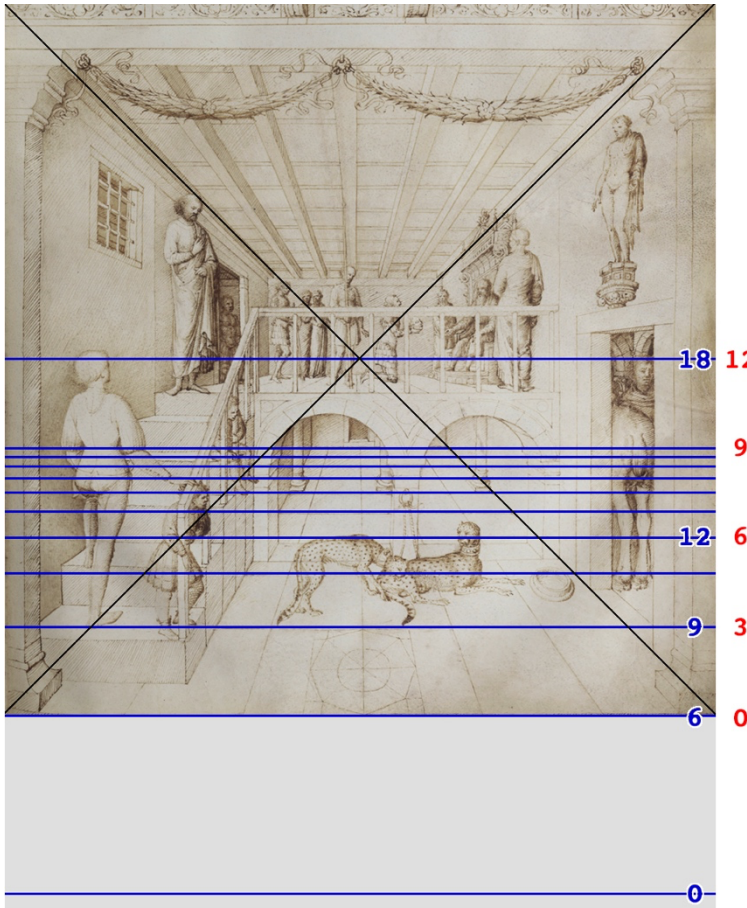
Ich glaube, dass um 1400 ein mehr vom arithmetischen als vom geometrischen Furor getriebener Gelehrter den Weg von der Zweidrittteilung hierher gut hätte schaffen können; sei es mit Absicht, oder durch Zufall.

À propos! Im ERSTEN ADDENDUM wird gezeigt, dass jedes «korrekte frontal-perspektivische» Pavimentbild mit Hilfe einer gebrochen-linearen Funktion numerisch darstellbar ist.

Das Pavimentmuster dieser Methode ist kein ganz starres Korsett. Es gibt Variationsmöglichkeiten. Die numerische Abfolge der **Querlinien** kann ganz unterschiedlich in eine Zeichnung übernommen werden. Man lässt einfach ein beliebig langes Anfangsstück der **Querlinienfolge** weg. In das Pavimentbild der folgenden Zeichnung wurde zum Beispiel das erste Glied der Folge nicht übernommen.

Bild09

Teil einer Zeichnung (RF1509) aus dem Louvre Skizzenbuch · «La testa straccata di Annibale presentata al re Prusia»



Hier wollte man im ersten **Querstreifen** sicher ein **regelmäßiges** Achteck darstellen. Es ist das Bild eines Paviments mit quadratischen Fliesen. Die Sehdistanz d ist also gegeben:

$$d = 12 = \text{halbe Bildbreite} = \text{halbe Bildhöhe}$$

Neben Symmetrien hat dieses Pavimentbild auch eine sehr schöne **numerische** Struktur!

Vom **Paviment** (bis zum Horizont!) ist

- der erste **Querstreifen** ein Viertel,
- und sind
- die ersten drei **Querstreifen** zwei Viertel,
- die ersten neun **Querstreifen** drei Viertel.

Formel für die Lage der N -ten **Querlinie**:

$$\text{Lage (N)} = 12 \cdot N / (3 + N)$$

Tabelle dazu:

N	=	0	1	3	6	9
Lage (N)	=	0	3	6	8	9

IDEEN OHNE ENDE

Zu jener Zeit gab es vielleicht noch andere Zahlenspielerien, mit denen man das Platzieren der **Paviment-Querlinien** in den Griff bekommen wollte. Den Ideen waren keine Grenzen gesetzt.

Von den vielen denkbaren Varianten sei nur noch das «**Lineare Verfahren**» erwähnt, das man eventuell einigen Pavimentdarstellungen unterziehen kann.

Weil die Breiten der **Querstreifen** abnehmen sollten, ist der Griff nach der inversen Folge der Natürlichen Zahlen naheliegend, aber ein bisschen naiv. Naiv deshalb, weil man darüber hinwegsieht, dass eine solche Abfolge – im Gegensatz zur korrekten Folge der **Querstreifen**-Breiten – immer **endlich** ist. Bei 0 ist Schluss!

Man rekrutiert die Breiten der **Querstreifen** aus Teilstücken der Folge

... 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

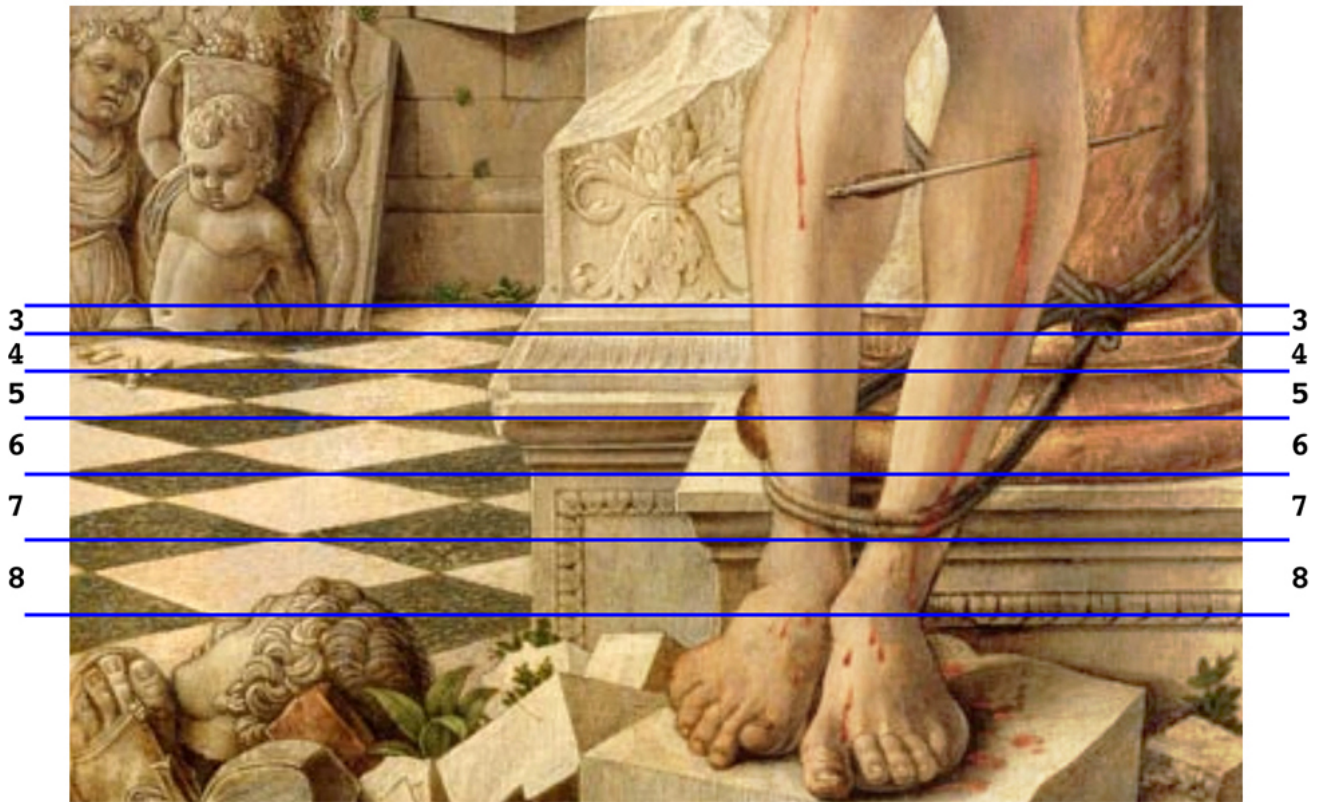
Die Faktorenfolge dazu sieht so aus

... $\frac{10}{11}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{1}$

Auch diese Folge ist stetig abnehmend, endlich und endet bei 0.

Ein Pavimentbild, dem man eventuell dieses «Lineare Verfahren» zuschreiben könnte:

Bild10 Ausschnitt von «San Sebastiano» · Andrea Mantegna · Kunsthistorisches Museum · Wien



Ausführlicheres zu Mantegna im DRITTEN ADDENDUM.

FAZIT

Im 14. und im 15. Jahrhundert gab es unter den Scholastikern an den Universitäten auch solche mit Spezialgebiet Mathematik. Ein besonderes Interesse hatten diese an unendlichen Reihen. Eingepackt waren Überlegungen dazu meist in Untersuchungen über die Bewegung (DE MOTU) ⁰⁶. Am Anfang dieser Tradition steht das vermeintliche Paradoxon vom Langsamsten ($\beta\rho\alpha\delta\upsilon\tau\alpha\tau\omicron\nu$) und vom Schnellsten ($\tau\alpha\chi\acute{\iota}\sigma\tau\omicron\nu$). ⁰⁷

Meine Überzeugung ist, dass es in der Zeit um 1450 **mehrere verschiedene numerische Methoden** gab, mit denen die Bilder von Transversalen (Querlinien) in einem Pavimentbild platziert wurden. Dafür gibt es fast keine historischen Belege. Einen vagen findet man bei Leonardo da Vinci (siehe SECHSTES ADDENDUM). Vielleicht gibt es mehr davon, aber man hat sie bisher nicht gefunden bzw. nicht als solche erkannt. Das spricht nicht unbedingt gegen meine Überzeugung.

ADDENDA

ERSTES ADDENDUM · ALLE KORREKTEN VERFAHREN SIND NUMERISCH DARSTELLBAR

ZWEITES ADDENDUM · VERSUCH EINER KLASSIFIZIERUNG DER NUMERISCHEN METHODEN

DRITTES ADDENDUM · PAVIMENTBILDER BEI MANTEGNA

VIERTES ADDENDUM · RECHTECK-PAVIMENT ODER QUADRAT-PAVIMENT?

FÜNFTES ADDENDUM · BILDERMATERIAL DER UNTERSUCHUNG

SECHSTES ADDENDUM · EINE TEXTSTELLE VON LEONARDO DA VICI

SIEBTES ADDENDUM · ANMERKUNGEN

ERSTES ADDENDUM · ALLE KORREKTEN VERFAHREN SIND NUMERISCH DARSTELLBAR

Man weiß, dass sogenannte «gebrochen-lineare Folgen» die Lagen von *Querlinien* von korrekten linear-perspektivischen *Pavimenten* beschreiben, so wie unser Paradebeispiel bei der DRITTEN IDEE des DRITTEN TEILS.

Dort ist Lage der *Querlinien* (die Grundlinie ist die 0-te, der Horizont die ∞ -te *Querlinie*) gegeben durch:

$$\text{Lage}(\text{N-te } \textit{Querlinie}) = 3 \cdot N / [N+2]$$

$$\text{Lage}(\text{0-te } \textit{Querlinie}) = 0$$

$$\text{Lage}(\text{1-te } \textit{Querlinie}) = 1$$

$$\text{Lage}(\text{Horizont}) = 3$$

$$\text{Abstand}(\text{1-te } \textit{Querlinie} - \text{Horizont}) = 2$$

Ein korrektes *Paviment* ist – zum Beispiel – definiert durch die Lagen von Grundlinie, 1-ster *Querlinie* und Horizont.

Wie bestimmt man dann das zugehörige numerische Verfahren?

Man misst mit einem geeignetem Maßstab die Lagen von Grundlinie (=0), 1-ster *Querlinie* (=e) und Horizont (=h).

Geeignet ist der Maßstab, wenn h/e ein gekürzter gewöhnlicher Bruch ist.

In unserm Paradebeispiel ist $h/e = 3/1$ und $h-e = 2$.

Die Formel zur numerischen Bestimmung der *Querlinien*-Lagen lautet:

$$\text{Lage}(\text{N-te } \textit{Querlinie}) = e \cdot h \cdot N / [e \cdot N + (h-e)]$$

und beim Paradebeispiel:

$$\text{Lage}(\text{N-te } \textit{Querlinie}) = 1 \cdot 3 \cdot N / [1 \cdot N + 2]$$

Aufgabe:

Man bestimme das numerische Verfahren, das zu einem korrekten *Paviment* mit den folgenden Parametern passt.

$$h = 13 \text{ und } e = 4 \text{ und } h-e = 9$$

Lösung:

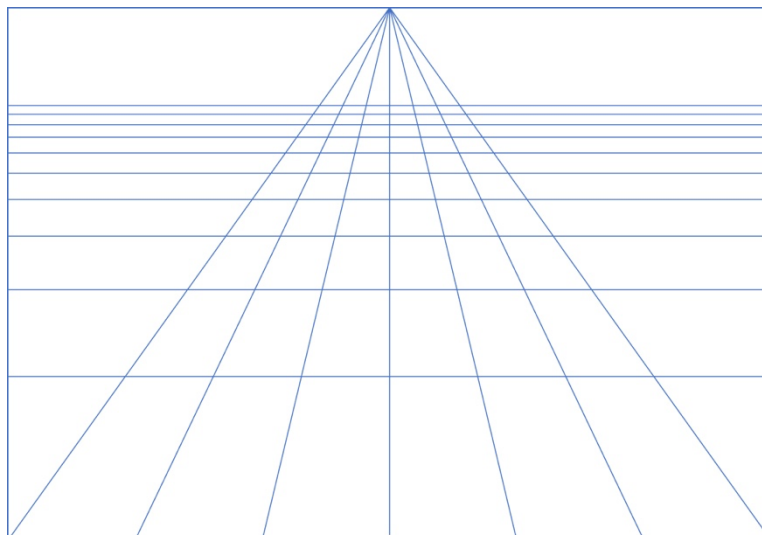
Die Formel zur numerischen Bestimmung der *Querlinien*-Lagen lautet:

$$\text{Lage}(\text{N-te } \textit{Querlinie}) = 4 \cdot 13 \cdot N / [4 \cdot N + 9]$$

Daraus ergibt sich die Folge der *Querlinien*-Lagen:

$52 \cdot 0/9$	$52 \cdot 1/13$	$52 \cdot 2/17$	$52 \cdot 3/21$	$52 \cdot 4/25$	$52 \cdot 5/29$	$52 \cdot 6/33$	$52 \cdot 7/37$	...	$52 \cdot 1/4$
0	4								13

Und dazu passt das Pavimentbild:



ZWEITES ADDENDUM · VERSUCH EINER KLASSIFIZIERUNG DER NUMERISCHEN METHODEN

Kriterien für die Unterteilung sind zum Beispiel

- die Stetigkeit in der Abfolge der **Querstreifen**-Breiten (immer positive Größen)
- die Stetigkeit in der Abfolge der Faktoren (Quotienten) zwischen Breiten von **benachbarten Querstreifen**.

KRITERIUM 1 – **K1**

Für je drei Breiten a, b, c von aufeinander folgenden **Querstreifen** gilt immer: $0 < a < b < c$.

KRITERIUM 2 – **K2**

Für Faktoren u zwischen Breiten aufeinanderfolgender **Querstreifen** gilt immer: $0 < u < 1$.

KRITERIUM 2a – **K2a**

Für je drei Faktoren u, v, w zwischen vier Breiten aufeinanderfolgender **Querstreifen** gilt immer: $0 < u < v < w < 1$.

KRITERIUM 2b – **K2b**

Für je drei Faktoren u, v, w zwischen vier Breiten aufeinanderfolgender **Querstreifen** gilt immer: $0 < u = v = w < 1$.

Die Menge der Methoden, die dieses Kriterium und das Kriterium 1 erfüllen, ist die Menge der Proportionalverfahren.

KRITERIUM 2c – **K2c**

Für je drei Faktoren u, v, w zwischen vier Breiten aufeinanderfolgender **Querstreifen** gilt immer: $1 > u > v > w > 0$.

KRITERIUM 3a – **K3a**

Die Folge der Lagen der **Querlinien** ist eine vom Typ, wie er im ERSTEN ADDENDUM beschrieben ist.

$$\text{Lage}(\text{N-te Querlinie}) = e \cdot h \cdot N / [e \cdot N + (h - e)]$$

Es handelt sich also um eine Methode für eine korrekte frontale Zentralperspektive.

KRITERIUM 3b – **K3b**

Die Folge der Faktoren zwischen Breiten aufeinanderfolgender **Querstreifen** ist ein Ausschnitt aus der Folge

$$1/2 \quad 2/3 \quad 3/4 \quad 4/5 \quad 5/6 \quad 6/7 \quad 7/8 \quad 8/9 \quad 9/10 \quad 10/11 \quad 11/12 \quad 12/13 \quad \dots$$

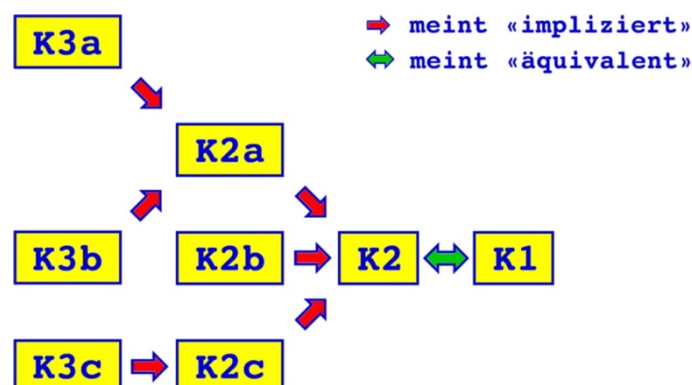
Es handelt sich um ein harmonisches Verfahren.

KRITERIUM 3c – **K3c**

Die Folge der Faktoren zwischen Breiten von aufeinanderfolgenden **Querstreifen** ist ein Ausschnitt aus der Folge

$$\dots 12/13 \quad 11/12 \quad 10/11 \quad 9/10 \quad 8/9 \quad 7/8 \quad 6/7 \quad 5/6 \quad 4/5 \quad 3/4 \quad 2/3 \quad 1/2$$

Es handelt sich um ein lineares Verfahren.



Für manche Pavimentbilder, die nicht einmal **K1** erfüllen, trifft Folgendes zu: Wird nur eine regelmäßige Teilfolge der **Querlinien** – "nur jede n-te Linie" – betrachtet, ist **K1** erfüllt. Das könnte bedeuten: Die Teilfolge wurde mit Methode erstellt, die Linien dazwischen aber etwas nachlässig dazwischen gesetzt.

DRITTES ADDENDUM · PAVIMENTBILDER BEI MANTEGNA

Vergleicht man die Pavimentbilder bei Mantegna mit korrekten Pavimentmustern, stellt man fest:

Wenn überhaupt, dann passen sie nur zu «späten» Ausschnitten der korrekten Abfolge der *Querlinien*, also zu Ausschnitten bei denen jeweils zwei benachbarte *Querstreifen* fast gleich breit sind.

Dort sind die Faktoren – von einer Breite zur nächsten – schon sehr nahe bei 1.

Zum Beispiel passt die eher «späte» Faktoren-Folge

$$21/23 < 22/24 < 23/25 < 24/26 < 25/27 < 26/28 < 27/29 < 28/30 < 29/31 \dots \text{in etwa zum}$$

Bild11 Ausschnitt von «San Giacomo battezza Ermogene» · Andrea Mantegna · Chiesa degli Eremitani · Padova



Vom korrekten Muster, das zum Bild einigermaßen passt, sind eingezeichnet:

- in Rot Bilder von *Querlinien*,
- in Blau der entsprechende Horizont *hQ*.

Wenn man annimmt, dass das Bild ein Paviment mit quadratischen Fliesen darstellt, so resultiert aus der engen Abfolge der *Querlinien* eine relativ große Sehdistanz, was Mantegna wohl ein Anliegen war. Die Sehdistanz ist ungefähr das Fünffache des Abstands der Grundlinie vom Horizont.

À propos: **H** – der Hauptpunkt passend zu den Tiefenlinien – liegt auf **hQ**.

Man ist versucht, dem Mantegna-Bild Korrektheit zu bescheinigen. Aber es gibt starke Abweichungen, die hier durch das korrekte Muster verdeckt werden.

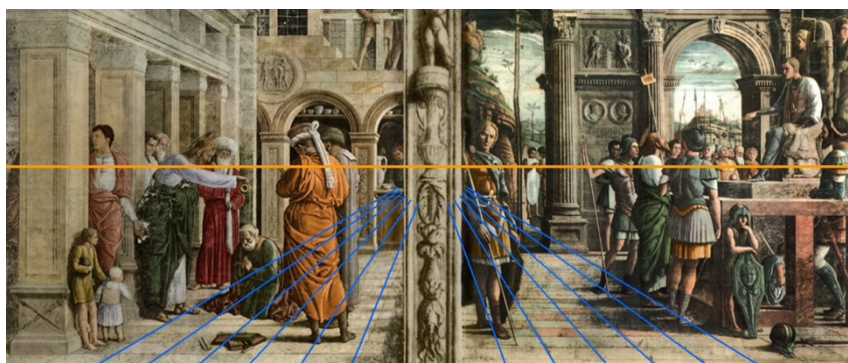
Das Pavimentbild erfüllt das Kriterium 1 (siehe ZWEITES ADDENDUM) nicht! Weicht man aus auf Felder mit 3 mal 4 Fliesen, ist wenigstens das Kriterium 1 erfüllt. Aber die Nagelprobe besteht das Pavimentbild auch in dieser Unterteilung nicht. Die *w-Diagonalenzüge* haben einen Linksdrall.

Zum Nachbarbild

Das Sankt-Jakob-Fresco in der *Cappella Ovetari* der *Chiesa degli Eremitani* in Padova wurde bei einem Bombardement 1944 stark beschädigt. Erhalten sind Fotografien, mit denen hier gearbeitet wird.

Im mittleren Teil rechts neben dem **Bild11** das

Bild12 Ausschnitt von «San Giacomo inanzi a Erode Agrippa»
Andrea Mantegna · Chiesa degli Eremitani · Padova



Die beiden Pavimentbilder haben ungefähr denselben Hauptpunkt für die Tiefenlinien, also auch den gleichen Horizont **hT** für die Tiefenlinien. Die Abfolge der Querlinien ist im **Bild12** eher chaotisch und das Kriterium 1 auch nicht mit Fliesengruppierungen zu retten.



Ein weiteres Beispiel:

Die Faktoren-Folge $^{18}/_{20} < ^{19}/_{21} < ^{20}/_{22} < ^{21}/_{23} < ^{22}/_{24}$ entspricht ungefähr dem **Paviment** im

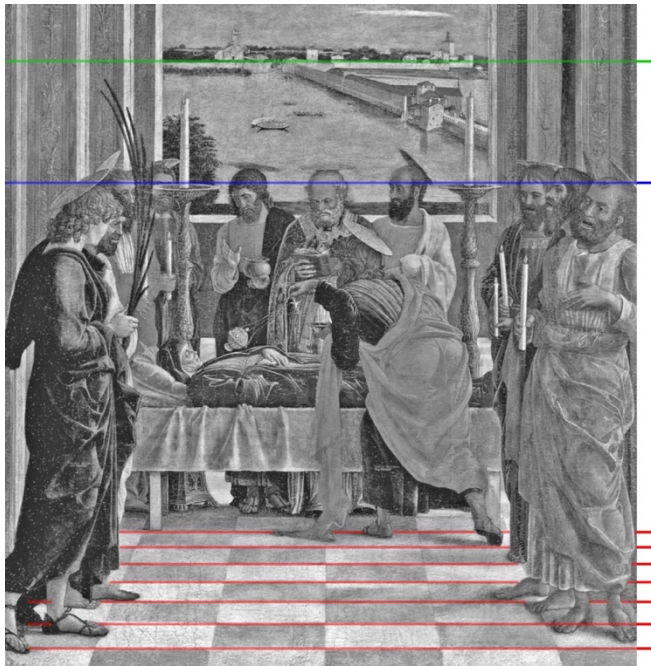


Bild13 Ausschnitt von «La morte della Vergine»
Andrea Mantegna
Museo Nacional del Prado · Madrid

Vom korrekten Muster, das zum Bild einigermaßen passt, sind eingezeichnet:

- in Rot Bilder von Querlinien,
- in Blau der entsprechende Horizont **hQ**,
der auch annähernd zu den Augen der Personen in passt.

Und dazu noch

- in Grün der Horizont **hT**,
der zu den **Tiefenlinien** und zur Landschaft passt.

Der Hauptpunkt der Tiefenlinien liegt also nicht auf **hQ**.

Hier wird für einmal die starke Abweichung von **hQ** und **hT** problematisch, weil der Bildraum nicht begrenzt ist, sondern freie Aussicht bis hin zum Landschaftshorizont ermöglicht.

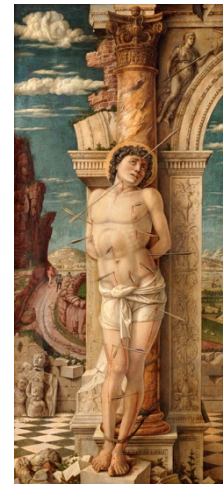
Das ist der Grund für die Irritation, die beim Betrachten des Bildes aufkommt. Der Wasserspiegel des Lago di Mezzo (bei Mantova) wirkt gegenüber dem Paviment geneigt!

.. und noch drei andere Beispiele

Bild14 «Circoncisione» · Andrea Mantegna · Museo Nacional del Prado · Madrid

Bild15 «Flagellazione» · Scuola di Andrea Mantegna · Metropolitan Museum of Art · New York

Bild10 «San Sebastiano» · Andrea Mantegna · Kunsthistorisches Museum · Wien (siehe DRITTER TEIL)



Alle drei Pavimentbilder sind nicht Ergebnisse von korrekten zentralperspektivischen Verfahren.

Folgerung: Es fehlen korrekte Pavimentbilder bei Mantegna! Das ist ein Rätsel!

Denn einerseits wurden in anderen Bereichen die konstruktiven Regeln der Zentralperspektive meistens akkurat umgesetzt. Und andererseits sollte man doch in Mantegnas Atelier gewusst haben von den im Umfeld angewandten einfachen Rezepten für korrekte Pavimentbilder.

Was war das also? Bewusster freihändiger Kontrapunkt im Dienste der Bildkomposition? Oder Nachlässigkeit? Oder Unvermögen der dafür zuständigen Lehrlinge? Oder?

Vielleicht hat ein geneigter Leser Antworten auf diese Fragen.

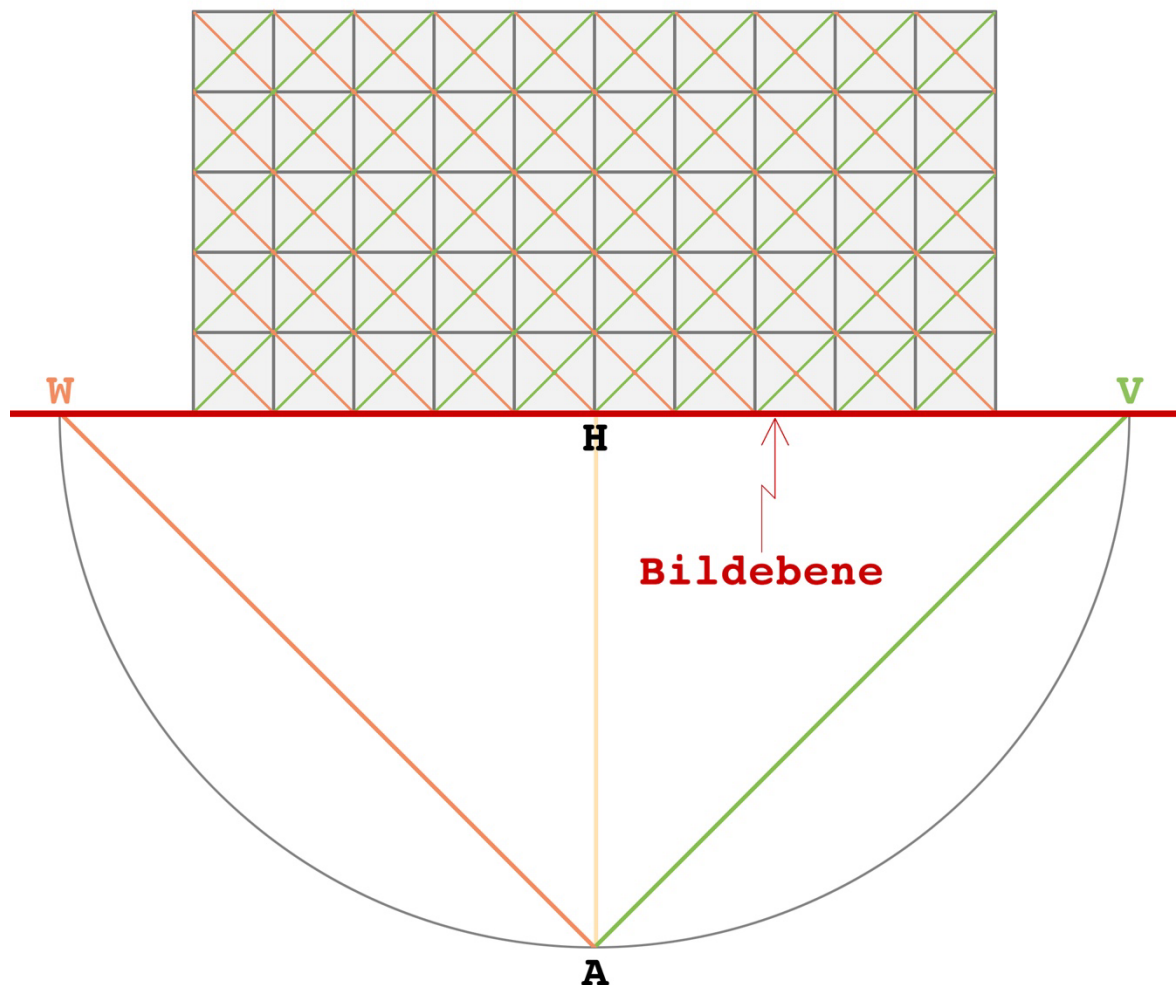
VIERTES ADDENDUM · RECHTECK-PAVIMENT ODER QUADRAT-PAVIMENT?

Alle vorangegangenen Untersuchungen betrachteten das Pavimentbild als Darstellung eines Paviments aus rechteckigen Fliesen, kümmerten sich aber nicht darum, wie man es auch als Darstellung eines Paviments aus quadratischen Fliesen sehen könnte.

Ist das Vorbild ein Paviment aus quadratischen Fliesen, dann

- schneiden sich v-Diagonallinien und w-Diagonallinien rechtwinklig.
- ist der Sehstrahl **AV** vom Auge nach **V** parallel zu den v-Diagonallinien.
- ist der Sehstrahl **AW** vom Auge nach **W** parallel zu den w-Diagonallinien.
- bilden also **AV** und **AW** einen rechten Winkel.
- muss also **A** auf dem Thaleshalbkreis über **WV** liegen.
- sind folglich **WH**, **AH** und **VH** gleich lang.
- gilt folglich: Die Sehdistanz $\overline{AH}$ ist gleich $\overline{WH}$ und gleich $\overline{HV}$ und gleich der Hälfte von $\overline{WV}$.

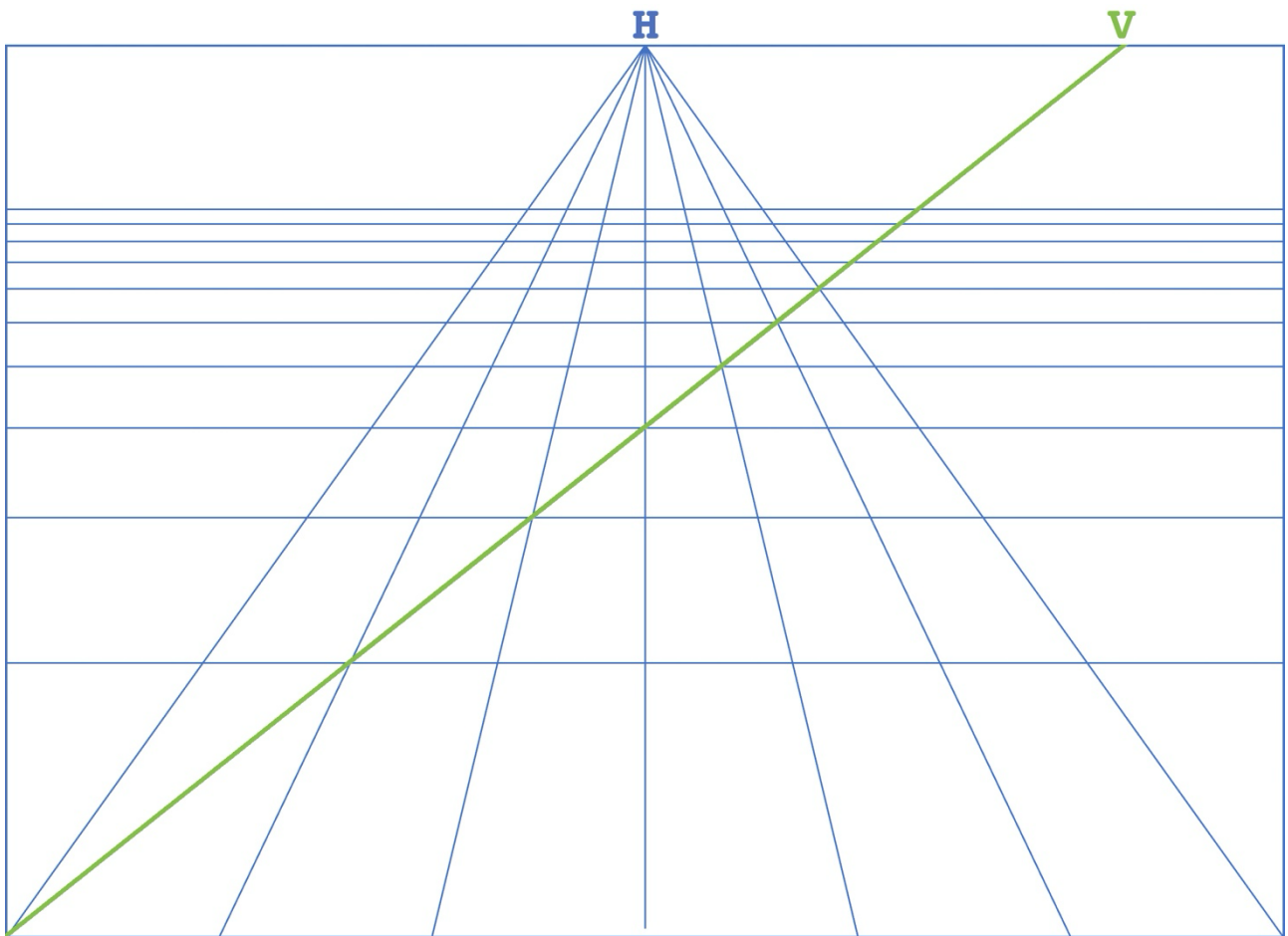
Die Situation von Vorbild, Bildebene und Betrachter im Grundriss:



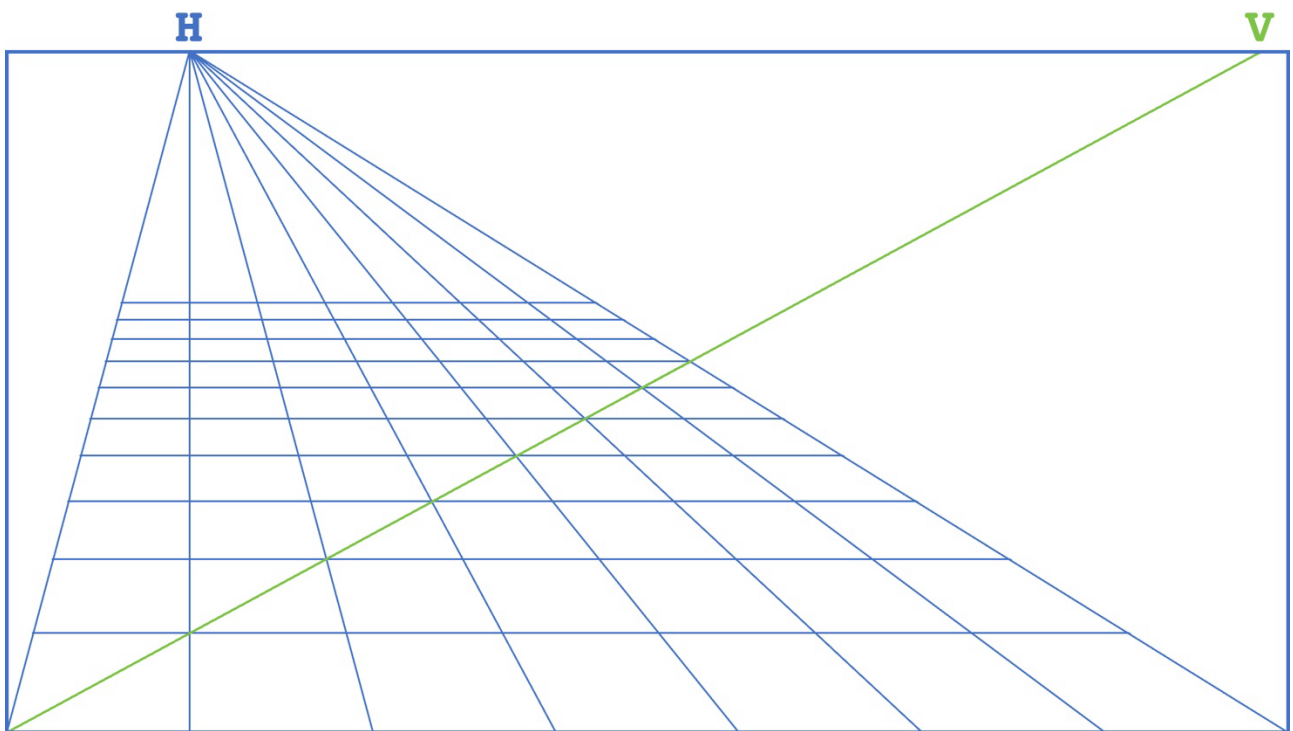
Kurzum: Werden in einem Pavimentbild **quadratische** Fliesen dargestellt, dann ist die **Sehdistanz festgelegt!**

Diese korrekte Distanz kann auch experimentell festgestellt werden. Der Betrachter bewege dazu das Auge auf der Senkrechten zur Bildebene durch den Hauptpunkt **H**. Irgendwo wird sich der Eindruck von ungefähr quadratischen Fliesen einstellen.

Dazu ein Beispiel mit extrem kleiner Sehdistanz:



Und ein Beispiel mit etwas größerer Sehdistanz:



FÜNFTES ADDENDUM · BILDERMATERIAL DER UNTERSUCHUNG

Album Londonese · British Museum · London		
	La pigiatura	BM 59v
	Morte della Vergine	BM 66r
Album Parigino · Musée du Louvre · Paris		
	Flagellazione	RF 427r
	Flagellazione	RF 1476r
	Presentazione al tempio	RF 1478
	Cristo innanzi a Pilato	RF 1503r
	La testa straccata di Annibale presentata al re Prusia	RF 1509r
	Episodio della tomba vuota	RF 1520r
Bellini, Giovanni		
	Annunciazione	Gallerie dell'Accademia · Venezia
Botticelli, Sandro		
	Annunciazione	Gallerie degli Uffizi · Firenze
Bouts, Dieric		
	De vuurproef	Musées Royaux des Beaux-Arts · Bruxelles
Carpaccio, Vittore		
	Natività della Vergine	Accademia Carrara · Bergamo
Correggio		
	Decollazione di San Giovanni Battista	Basilica Sant'Andrea · Mantova
Crivelli, Carlo		
	Flagellazione (Predella)	Chiesa San Silvestro · Massa Fermana
da Forlì, Melozzo		
	Sisto IV nomina il Platina prefetto della biblioteca Vaticana	Pinacoteca Vaticana · Roma
da Settignano, Desiderio		
	Tabernacolo del Sacramento	San Lorenzo · Firenze
da Vinci, Leonardo		
	Studio in prospettiva per l'«Adorazione dei magi»	Gallerie degli Uffizi · Firenze
David, Gerard		
	De verkondning aan Maria	Metropolitan Museum of Art · New York
de'Menabuoi, Giosto		
	Annunciazione	Basilica di Sant'Antonio · Padova
degli Erri, Agnolo e Bartolomeo		
	Salomè presenta la testa di San Giovanni Battista	Privatbesitz
del Verrocchio, Andrea		
	Madonna con Giovanni Battista e San Donato	Duomo · Pistoia
della Francesca, Piero		
	Disegni · De prospectiva piongendi	MS 1576 · Biblioteca Palatina · Parma
di Paolo di Grazia, Giovanni		
	Annunciazione	National Gallery of Art · Washington DC
di Pietro, Sano		
	San Girolamo fustigato degli angeli	Musée du Louvre · Paris
Donatello		
	Banchetto di Erode	Palais des Beaux-Arts · Lille
Fouquet, Jean		
	Marie Madeleine et le Christ · Heures d'Étienne Chevalier	Musée Condé · Chantilly
Giorgione		
	Madonna con santi	Duomo · Castelfranco Veneto

Huguet, Jaume		
	Flagellation	Musée du Louvre · Paris
Lorenzetti, Ambrogio		
	Annunciazione	Pinacoteca Nazionale · Siena
Mantegna, Andrea		
	Morte della Vergine	Museo Nacional del Prado · Madrid
	San Giacomo battezza Ermogene	Cappella Ovetari · Chiesa degli Eremitani · Padova
	San Giacomo innanzi a Erode Agrippa	Cappella Ovetari · Chiesa degli Eremitani · Padova
	San Sebastiano	Kunsthistorisches Museum · Wien
Masolino da Panicale		
	Annunciazione	National Gallery · London
	Disputa di Santa Caterina d'Alessandria	San Clemente · Roma
Memling, Hans		
	Donne-Triptychon	National Gallery · London
Pisanello		
	Personaggi in una sala a volta	Codex Vaillardi · Musée du Louvre · Paris
Signorelli, Luca		
	Circoncisione	National Gallery · London
Uccello, Paolo		
	Un episodio degli «Miracoli dell'ostia»	Palazzo Ducale · Urbino
van der Weyden, Jan		
	L'hommage del'auteur · Chronique de Hainault	MS 9242 · Bibliothèque Royale de Belgique · Bruxelles
van Eyck, Jan		
	Madonna in de kerk	Gemäldegalerie · Berlin
	De Madonna van kanselier Rolin	Musée du Louvre · Paris
van Meckenem, Israhel		
	Pilatus' Handwaschung · aus dem Passionsalbum	Metropolitan Museum of Art · New York
Vanni, Lippo		
	Annunciazione	Eremo di San Leonardo al Lago · Siena
Viator		
	Frontispice	De arteficiali Perspectiva · Ed. 2
	page B. i.	De arteficiali Perspectiva · Ed. 2
Zoppo, Marco		
	Sei bambini su un pavimento, quattro lottanti	Folio 15 · Rosebery Album · British Museum London

Die Bedeutung der Farben

Betreffend die Abfolge der Querlinienbilder liegt vor:



ein perspektivisch korrektes Verfahren

.. mit kleinen Ungenauigkeiten



ein Proportionalverfahren

.. aber nur, wenn man eine Gruppierung vornimmt (d.h. nur jedes n-te Querlinienbild berücksichtigt).



ein harmonisches Verfahren



ein lineares Verfahren



kein Konzept; das Kriterium K1 ist nicht erfüllt (siehe ZWEITES ADDENDUM)

.. dass es aber eine Gruppierung gibt, mit der das Kriterium K1 erfüllt wird.



kein solider Befund

SECHSTES ADDENDUM · EINE TEXTSTELLE VON LEONARDO DA VICI

Quelle 1: Bibliothèque de l'Institut de France
Les carnets de Léonard de Vinci
Ms 2185 [Feuilles découpées du Manuscrit A (Ms 2172)] – fol. 23 recto
(Siehe gespiegeltes Digitalisat auf Seite 28)

Text 1: della prospettiva lineale

La prospectina lineale sastende nel ofizio delle linee visuale a provare per misura quanto la cosa seconda e minore che la prima e quanto la terza e minore che la sechonda e chossi de grado in grado insino al fine delle cose vedute |
| truovo per esperienza che la chosa sechonda seffara tanto distante dalla prima quanto la prima e distante da lochio tuo che benche infra loro sieno di pare grandezza che lla 2. sia alitrante minore che la prima | esse
la terza cosa di pari grandezza ala 2. e 3. inanzi a essa sia lontana da lla 2. quanto la 2. da la terza sia di meta grandezza della 2. |
| e cossi di grado in grado per pari distanza farano semper diminverroni proporzionalmente tra la sechonda dalla prima pure che lo intervallo non passi dentro al numero di 20 braccia |
| e infra 20 dette braccia la figura simile a te perdera i 4/5 di sua grandezza |
| e infra 40 perdera i 9/10 e poi i 19/20 in 60 braccia |
| e cossi di mano in mano fara sua diminutione |
| faciendo la parietà lontana da tte 2 volte tua grandezza chel fare 1 sola fa gran differenza dalle prime braccia alle 2.

N.B. Ausgeschrieben wurden Abkürzungen und Ligaturen, eingefügt zusätzliche Zeilensprünge |.
Rot markiert sind zwei augenfällige Schreibfehler. Da müsste 1. bzw prima stehen.

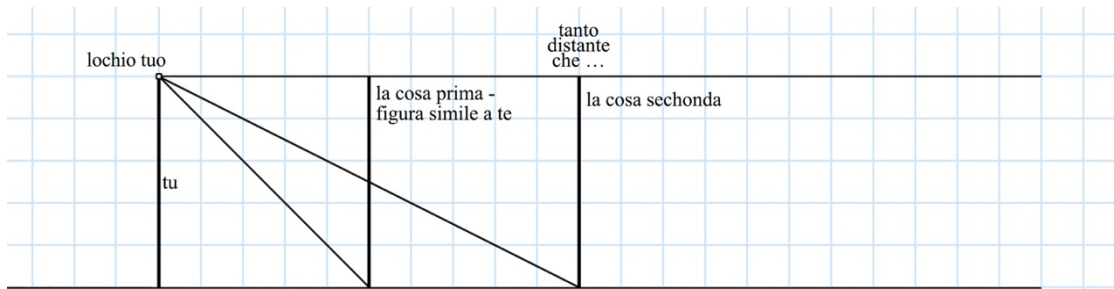
Quelle 2: Biblioteca Vaticana
Trattato della Pittura di Leonardo da Vinci (rielaborazione, forse fatta da Francesco Melzi)
Cod. Urb. Lat. 1270

Text 2: 456. Della prospettiva lineale.

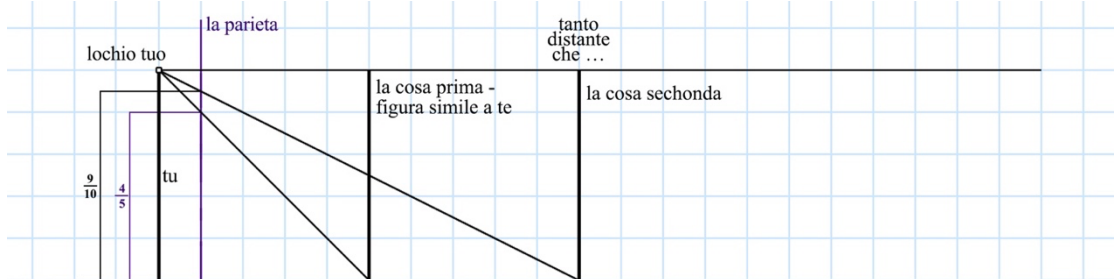
La prospettiva lineale si estende nell'ufficio delle linee visuali a provare per misura quanto la cosa seconda è minore che la prima, e la terza che la seconda, e così di grado in grado insino al fine delle cose vedute. Trovo per esperienza che la cosa seconda, se sarà tanto distante dalla prima quanto la prima è distante dall'occhio tuo, che, benché infra loro sieno di pari grandezza, la seconda sarà minore che la prima; e se la terza cosa sarà di pari grandezza della seconda e prima innanzi ad essa, sarà lontana dalla seconda quanto la seconda dalla prima, sarà di un terzo della grandezza della prima; e così, di grado in grado, per pari distanza faranno sempre diminuzione proporzionata la seconda dalla prima, purché l'intervallo non passi dentro al numero di venti braccia; e infra dette venti braccia la figura simile a te perderà due quarti di sua grandezza, ed infra quaranta perderà tre quarti e poi cinque sestì in sessanta braccia, e così di mano in mano farà sua diminuzione, facendo la parete lontana da te due volte la tua grandezza, ché il farla una sola fa gran differenza dalle prime braccia alle seconde.

N.B. Arbeitshypothese: Text 1 war Vorlage für Text 2.
Die Schreibfehler sind korrigiert.
Die weiteren inhaltlichen Abweichungen verändern die Lage der parietà zwischen ochio und prima cosa.
Siehe dazu die Illustration zu Text 2.

Versuch einer Illustration der **grau hinterlegten Teile** von Text 1 (ohne Rücksicht auf braccia-Maße)

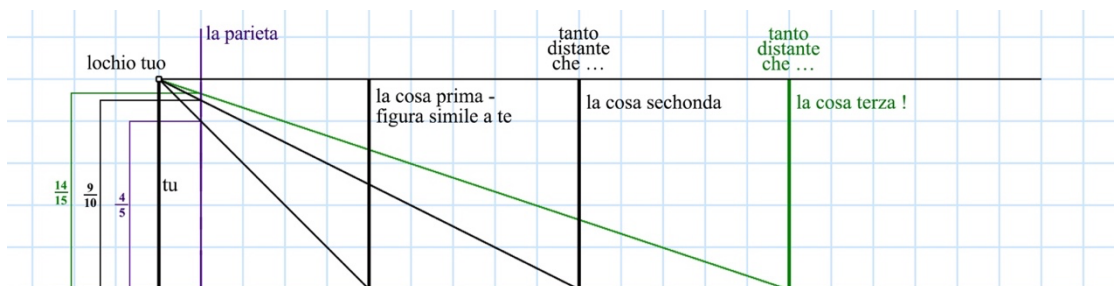


Grundsituation. Die Bildebene (parieta) hat mit den Äquidistanzen nichts zu tun.

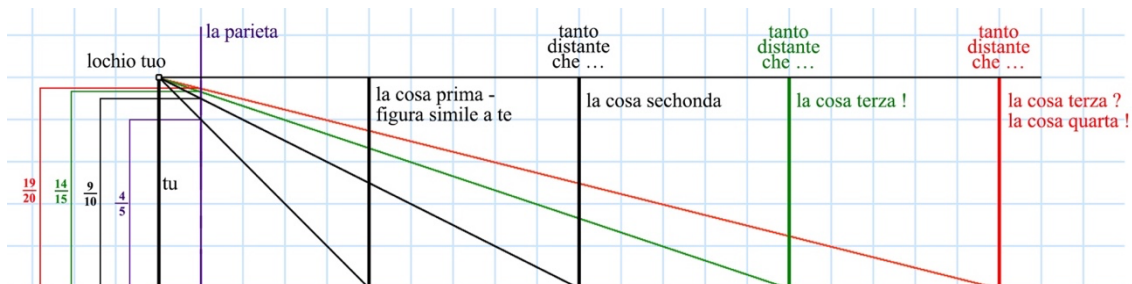


Die Abnahme der prima cosa um $4/5$ ist bestimmend für die Lage der parietà.

Für die Abnahme der seconda cosa resultiert dann tatsächlich $9/10$.



Die Abnahme der cosa terza ist $14/15$ und nicht $19/20$.



Die erwähnte Abnahme um $19/20$ passt exakt zur einer cosa quarta (in gleichem Abstand).

RESULTAT:

cosa-Nummer n =	1	2	3	4
Abnahme a =	$4/5$	$9/10$	$14/15$	$19/20$
Bildgröße i =	$1/5$	$1/10$	$1/15$	$1/20$

FORMELN: $i = 1/5n$ $a = 1 - i$

Die cosa-Nummer ist auch ein Maß für den Abstand vom Auge. Darum bedeutet die erste der beiden Formeln:

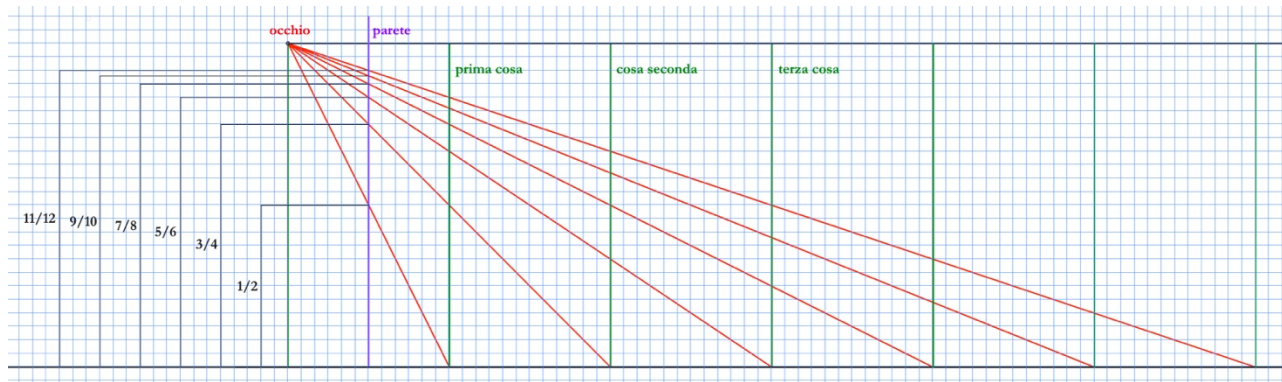
Die Bildgröße ist umgekehrt proportional zum Abstand.

Das zweimal vorkommende **di meta grandeza** und das Überspringen der eigentlichen cosa terza deuten darauf hin, dass Leonardo da Vinci hier eher eine geometrische Folge als die korrekte harmonische vorschwebt.

Also eher ein $1/5 \quad 1/10 \quad 1/20 \quad 1/40 \quad 1/80 \quad 1/160 \quad 1/320 \quad \dots$

als ein $1/5 \quad 1/10 \quad 1/25 \quad 1/30 \quad 1/35 \quad 1/40 \quad 1/45 \quad \dots$

Versuch einer Illustration der grau hinterlegten Teile von Text 2 (ohne Rücksicht auf braccia-Maße)



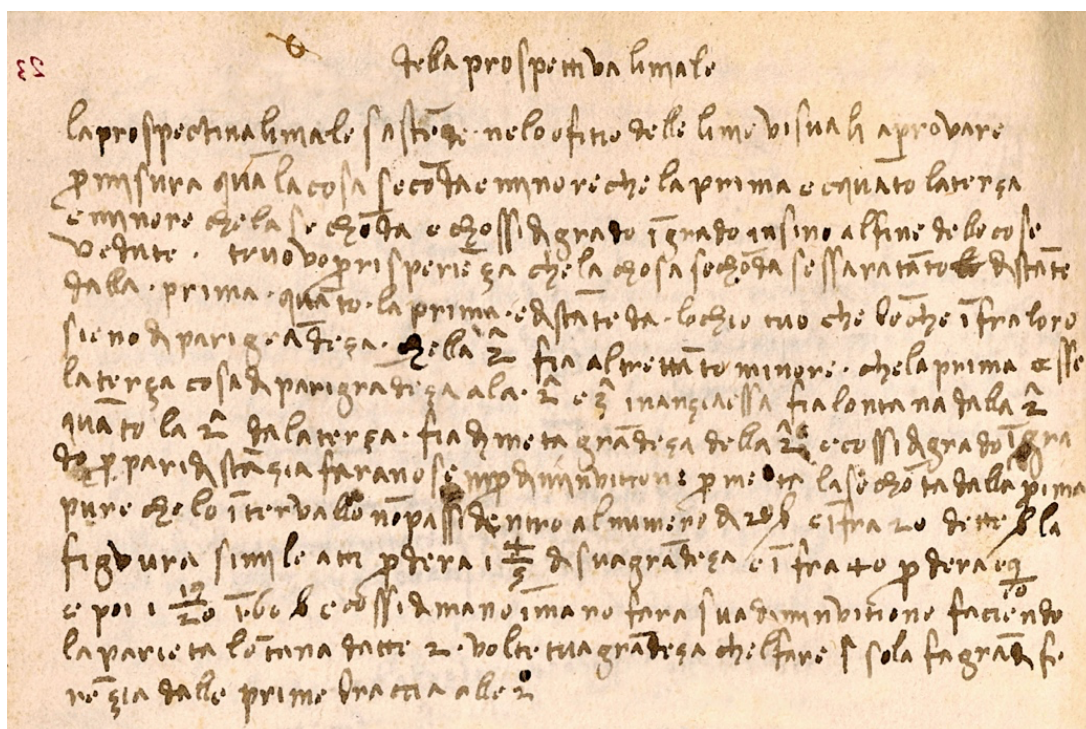
RESULTAT:

cosa-Nummer n =	1	2	3	4	5	5
Abnahme a =	1/2	3/4	5/6	7/8	9/10	11/12
Bildgröße i =	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10	1/12

FORMELN: $i = 1/2n$ $a + i = 1$

Bildgröße (terza cosa) = un terzo von Bildgröße (prima cosa)
 $1/6 = 1/3$ von $1/2$

Zum Schluss: Das gespiegelte Digitalisat von fol. 23r



SIEBTES ADDENDUM · ANMERKUNGEN

- ⁰¹ cf. ALBERTI, Leon Battista, «De pictura» (Darmstadt 2000)
- ⁰² Das Fehlen von Quellen ist irgendwie plausibel, denn Konstruktionsanleitungen waren wohl Interna - sprich: Betriebsgeheimnisse – der Malwerkstätten. Ein solches Betriebsgeheimnis war möglicherweise der Programmpunkt „le raxon d'un piano lineato ben secondo el mio modo“ im Lehrplan, den der Werkstatt-Meister Francesco Squarcione (Padova, 1397-1468) mit dem Vater eines neuen Lehrlings ausgehandelt hat.
- ⁰³ cf. della Francesca, Piero, «De Prospectiva pingendi» (ca. 1475)
- ⁰⁴ cf. Gaurico, Pomponio, «De Sculptura · IV. De Perspectiva» (Firenze 1504)
- ⁰⁵ cf. GRAMACCINI, Norberto, «Jacopo Bellini's Book of Drawings» (Berlin/Boston 2021)
- ⁰⁶ als Beispiel cf. THOMAS, Alvarus, «Liber de triplici motu» (Paris 1509):

Si sit aliquod tempus divisum per partes proportionales proportione dupla et in prima parte proportionali mobile moveatur aliquanta velocitate: et in secunda in duplo velocius quam in prima: et in tertia in sexquialtero velocius quam in prima: et in quarta in sexquitercio velocius quam in prima, et sic consequenter procedendo per omnes species proportionis superparticularis: spacium pertransitum in totali tempore est maius quam duplum ad spacium pertransitum in prima parte proportionali et minus quam quadruplum. Etc. etc.

- ⁰⁷ cf. ARISTOTELES, Phys. Z 9, 239b 14–18. Das sogenannte Achilles-Paradoxon:

δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς· ἔστί δ' οὗτος, ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θέον ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διώκον ὅθεν ὥρμησεν τὸ φεῦγον, ὥστε ἀεὶ τι προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον.

FINE